



TG 51 * Se consideră triunghiul ABC în care $b^2 + c^2 = 2a^2$ și $m(\hat{A}) = 30^\circ$.
Să se calculeze $\cos 2B + \cos 2C$.

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$\frac{a^2}{\sin^2 \alpha} = \frac{b^2}{\sin^2 \beta} = \frac{c^2}{\sin^2 \gamma}$$

$$\frac{a^2}{\sin^2 \alpha} = \frac{b^2 + c^2}{\sin^2 \beta + \sin^2 \gamma}$$

$$\frac{a^2}{\sin^2 \alpha} = \frac{2a^2}{\sin^2 \beta + \sin^2 \gamma}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{\sin^2 \beta + \sin^2 \gamma}$$

$$4 = \frac{2}{\sin^2 \beta + \sin^2 \gamma}$$

$$\sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \cos 2\beta + \cos 2\gamma &= 1 - 2\sin^2 \beta + 1 - 2\sin^2 \gamma = \\ &= 2 - 2(\sin^2 \beta + \sin^2 \gamma) = 2 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

d



TG 52 * Perimetrul triunghiului ABC este 12, iar unghiurile sale sunt respectiv $30^\circ, 30^\circ, 120^\circ$. Să se afle aria triunghiului.

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = \frac{a+b+c}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}$$

$$\frac{a}{\sin 30^\circ} = \frac{b}{\sin 30^\circ} = \frac{c}{\sin 120^\circ} = \frac{12}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$2a = 2b = \frac{2c}{\sqrt{3}} = \frac{24}{2 + \sqrt{3}}$$

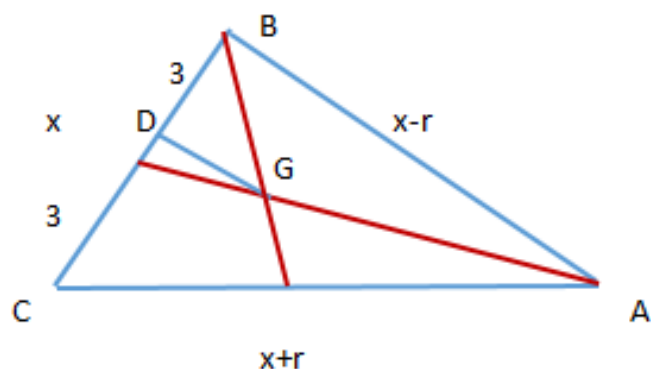
$$a = b = \frac{12}{2 + \sqrt{3}}$$

$$c = \frac{12\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{bc \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{\frac{12}{2 + \sqrt{3}} \cdot \frac{12\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2}}{2} = \\ &= \frac{36\sqrt{3}}{4 + 4\sqrt{3} + 3} = \frac{36\sqrt{3}}{7 + 4\sqrt{3}} = \frac{36\sqrt{3}(7 - 4\sqrt{3})}{49 - 48} = \\ &= 36(7\sqrt{3} - 12) \end{aligned}$$



TG 53 * Se consideră triunghiul dreptunghic ABC în care lungimile laturilor (AB) , (BC) , (CA) sunt în progresie aritmetică. Dacă M este mijlocul lui (BC) , iar G este centrul de greutate al triunghiului, să se calculeze aria triunghiului BMG știind că perimetrul triunghiului ABC este 18.



$$x - r + x + x + r = 18 \quad (6 + r)^2 = 6^2 + (6 - r)^2$$

$$3x = 18$$

$$x = 6$$

$$36 + 12r + r^2 = 36 + 36 - 12r + r^2$$

$$24r = 36$$

$$r = \frac{3}{2}$$

$$\triangle ABM \sim \triangle GDM$$

$$\frac{AB}{GD} = \frac{AM}{GM} = \frac{3}{1}$$

$$\frac{4,5}{GD} = 3$$

$$GD = 1,5$$

$$S_{BGM} = \frac{3 \cdot 1,5}{2} = 2,25 = \frac{9}{4}$$

a

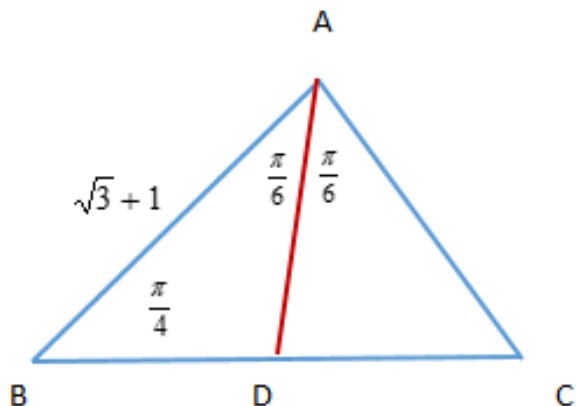


TG 54 * Se dă triunghiul ABC cu $AB = \sqrt{3} + 1$, $B = \frac{\pi}{4}$, $A = \frac{\pi}{3}$. Să se calculeze lungimea bisectoarei (AD) , $D \in (BC)$, a unghiului $\widehat{BAC}$.

$$\frac{\sqrt{3} + 1}{\sin[\pi - (\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4})]} = \frac{AD}{\sin \frac{\pi}{4}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3} + 1}{\sin(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4})} = \frac{AD}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow AD = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\sqrt{3} + 1)}{\sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{4}} \Rightarrow$$

$$AD = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\sqrt{3} + 1)}{1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow AD = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\sqrt{3} + 1)}{\frac{\sqrt{2}}{2} (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2})} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\frac{\sqrt{3} + 1}{2}} = 2$$

b

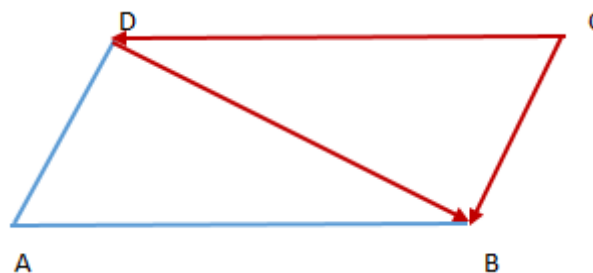




TG 55 Fie $ABCD$ un paralelogram. Care din următoarele afirmații nu este corectă?

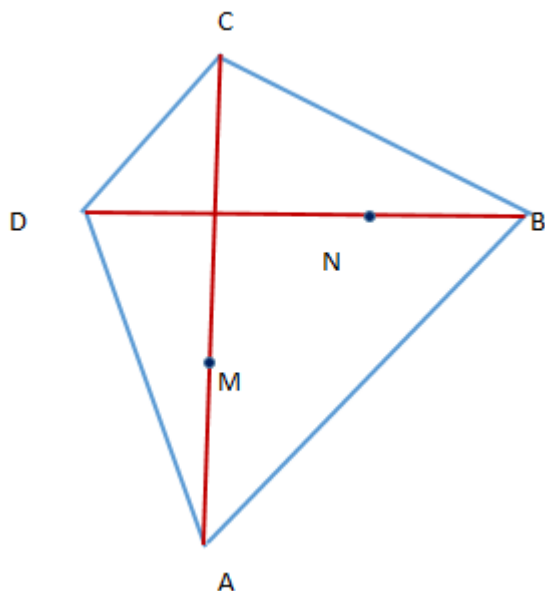
$$\vec{CD} - \vec{CB} = \vec{DB}$$

e





TG 56 * Se consideră un patrulater convex $ABCD$ și punctele M, N astfel ca $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC}$ și $2\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{ND}$. Să se afle valoarea parametrului real m pentru care $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} = m(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$.



$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} = m(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$$

$$\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} = m(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$$

$$\frac{1}{3}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OD}) = m(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$$

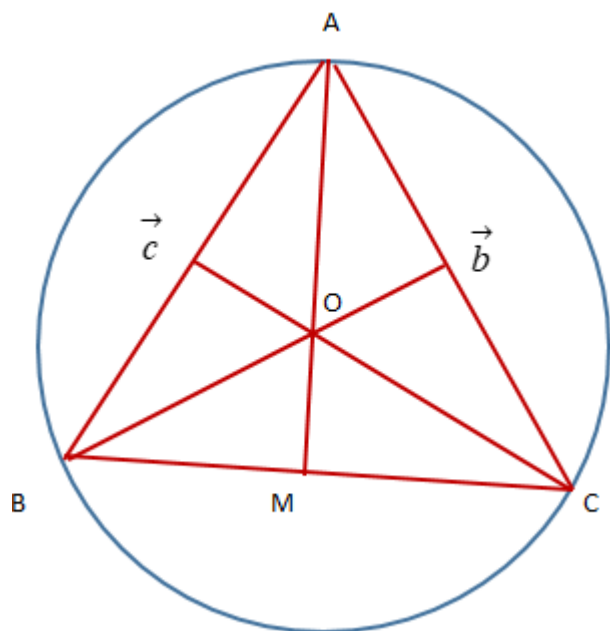
$$\frac{1}{3}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) = m(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$$

$$m = \frac{1}{3}$$

b



TG 57 * În triunghiul echilateral ABC , O este centrul cercului circumscris. Să se calculeze $\vec{OB} + \vec{OC}$ în funcție de $\vec{b} = \vec{AC}$ și $\vec{c} = \vec{AB}$.



$$\vec{MA} = \vec{MB} - \vec{c}$$

$$\vec{MA} = \vec{MC} - \vec{b}$$

$$2\vec{MA} = -\vec{b} - \vec{c}$$

$$\vec{MA} = -\frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}$$

$$3\vec{MO} = -\frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}$$

$$\vec{MO} = -\frac{\vec{b} + \vec{c}}{6}$$

$$2\vec{MO} = -\frac{\vec{b} + \vec{c}}{3}$$

$$\vec{OA} = -\frac{\vec{b} + \vec{c}}{3}$$

$$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{c}$$

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{b}$$

$$=====$$

$$\vec{OB} + \vec{OC} = 2\vec{OA} + \vec{b} + \vec{c}$$

$$\vec{OB} + \vec{OC} = -\frac{2}{3}(\vec{b} + \vec{c}) + (\vec{b} + \vec{c})$$

$$\vec{OB} + \vec{OC} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{3}$$



TG 58 * Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC și D simetricul lui A față de G . Să se determine parametrul real a astfel ca

$$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = a \overrightarrow{DG}.$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}$$

=====

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2 \overrightarrow{AM}$$

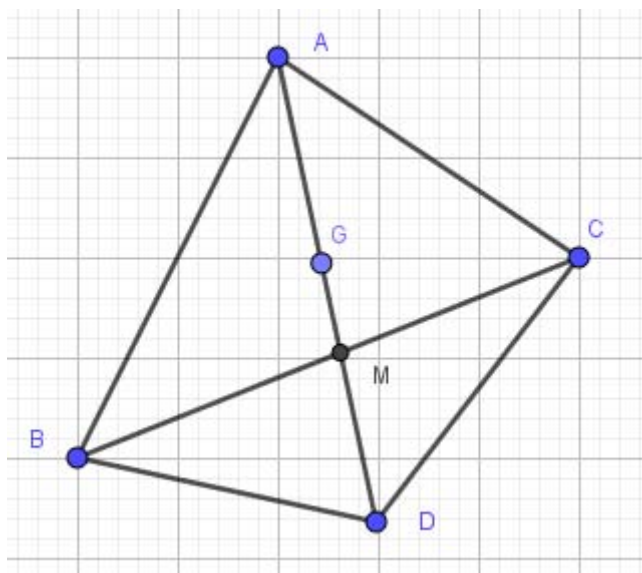
$$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}) =$$

$$= 3 \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3 \cdot \overrightarrow{DA} + 2 \cdot \overrightarrow{AM} = 3 \cdot 2 \cdot \overrightarrow{DG} - 2 \cdot 3 \cdot \overrightarrow{MG} =$$

$$= 6 \cdot \overrightarrow{DG} - 3 \cdot \overrightarrow{DG} = 3 \overrightarrow{DG}$$

$$a = 3$$

a





TG 59 * Pe laturile (BC) , (CA) , (AB) ale triunghiului ABC se consideră respectiv punctele M , N , P astfel ca

$$\frac{BM}{MC} = \frac{b}{c}, \quad \frac{CN}{NA} = \frac{c}{a}, \quad \frac{AP}{PB} = \frac{a}{b},$$

a, b, c fiind strict pozitive. Să se determine tripletele de numere reale (m, n, p) pentru care este adevărată egalitatea

$$(b+c)\vec{AM} + (c+a)\vec{BN} + (a+b)\vec{CP} = m\vec{AB} + n\vec{BC} + p\vec{CA}.$$

$$\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{BM}$$

$$\vec{AM} = \vec{AC} + \vec{CM}$$

=====

$$2 \cdot \vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{BM} + \vec{CM}$$

$$2 \cdot \vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AC} + \left(\frac{b}{b+c} - \frac{c}{b+c}\right) \vec{BC}$$

$$\vec{AM} = \frac{1}{2} \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{AC} + \frac{1}{2} \cdot \frac{b-c}{b+c} \vec{BC}$$

$$\vec{BM} = \frac{b}{b+c} \vec{BC}$$

$$\vec{CM} = -\frac{c}{b+c} \vec{BC}$$

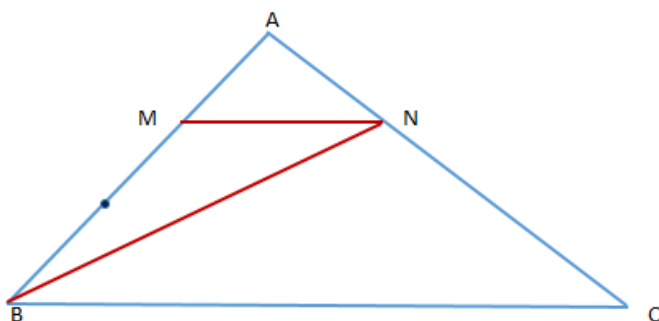
$$\vec{BN} = -\frac{1}{2} \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{BC} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a-c}{a+c} \vec{AC}$$

$$\vec{CP} = -\frac{1}{2} \vec{AC} - \frac{1}{2} \vec{BC} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a-b}{a+b} \vec{AB}$$

$$(b+c)\vec{CP} + (c+a)\vec{BN} + (a+b)\vec{CP} = \vec{0}$$



TG 60 * Fie ABC un triunghi oarecare și $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ cu $MN \parallel BC$.
Dacă $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, să se exprime vectorul $\overrightarrow{BN}$ în funcție de vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{BC}$.



$$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{BC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

=====

$$2\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$2\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$$

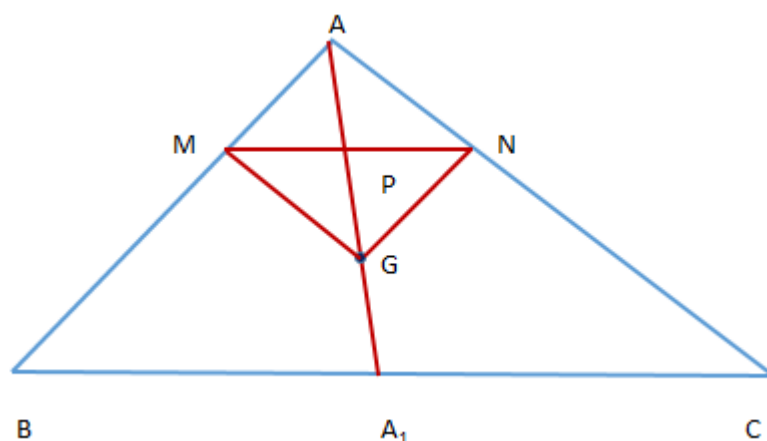
$$2\overrightarrow{BN} = \frac{3\overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}}{3}$$

$$\overrightarrow{BN} = \frac{2\overrightarrow{BC} - 4\overrightarrow{AB}}{6}$$

$$\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$



TG 61 * Pe laturile (AB) și (AC) ale triunghiului ABC se consideră punctele M și N astfel încât $MN \parallel BC$ și $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{MB}$. Să se determine valoarea parametrului real k pentru care $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AG}$, G fiind centrul de greutate al triunghiului ABC .



AMGN este un paralelogram

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AP}{PA_1} = \frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$$

$$k = \frac{1}{2}$$

C



TG 62 * Fie $ABCD$ un paralelogram în care $\vec{CF} + 3\vec{BF} = \vec{0}$ și $\vec{BD} = 5\vec{BE}$.
Să se afle valoarea parametrului real k pentru care $\vec{AF} + k\vec{AE} = \vec{0}$.

$$\vec{AE} = \vec{AD} + \vec{DE} = \vec{AD} + \frac{4}{5}\vec{DB}$$

$$\vec{AE} = \vec{AB} + \vec{BE} = \vec{AB} - \frac{1}{5}\vec{DB}$$

=====

$$2\vec{AE} = \vec{AD} + \vec{AB} + \frac{3}{5}\vec{DB}$$

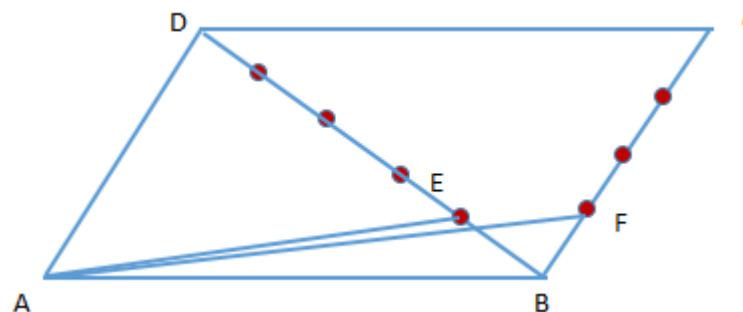
$$2\vec{AE} = \vec{AD} + \vec{AB} + \frac{3}{5}(\vec{DA} + \vec{AB})$$

$$2\vec{AE} = \vec{AD} + \vec{AB} - \frac{3}{5}\vec{AD} + \frac{3}{5}\vec{AB}$$

$$2\vec{AE} = \frac{2}{5}\vec{AD} + \frac{8}{5}\vec{AB}$$

$$\vec{AE} = \frac{1}{5}\vec{AD} + \frac{4}{5}\vec{AB}$$

$$\vec{AF} = \vec{AB} + \vec{BF} = \vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{BC} = \vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AD}$$



$$\vec{0} = \vec{AF} + k\vec{AE} = \vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AD} + \frac{k}{5}\vec{AD} + \frac{4k}{5}\vec{AB}$$

$$\vec{0} = \frac{5+4k}{5}\vec{AB} + \frac{5+4k}{20}\vec{AD}$$

$$5+4k=0$$

$$k = -\frac{5}{4}$$



TG 63 * Fie punctele coliniare A, P, B cu $P \in (AB)$ și $\frac{AP}{PB} = k$. Să se descompună vectorul de poziție al punctului P după vectorii de poziție ai punctelor A și B .

$$\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP} = \vec{OA} + \frac{k}{k+1} \vec{AB}$$

$$\vec{OP} = \vec{OB} + \vec{BP} = \vec{OB} - \frac{1}{k+1} \vec{AB}$$

=====

$$2\vec{OP} = \vec{r}_A + \vec{r}_B + \frac{k-1}{k+1} \vec{AB}$$

$$2\vec{OP} = \vec{r}_A + \vec{r}_B + \frac{k-1}{k+1} (-\vec{r}_A + \vec{r}_B)$$

$$2\vec{OP} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\right) \vec{r}_A + \left(1 + \frac{k-1}{k+1}\right) \vec{r}_B$$

$$2\vec{OP} = \frac{2}{k+1} \vec{r}_A + \frac{2k}{k+1} \vec{r}_B$$

$$\vec{OP} = \frac{1}{k+1} \vec{r}_A + \frac{k}{k+1} \vec{r}_B$$

$$\frac{AP}{PB} = k$$

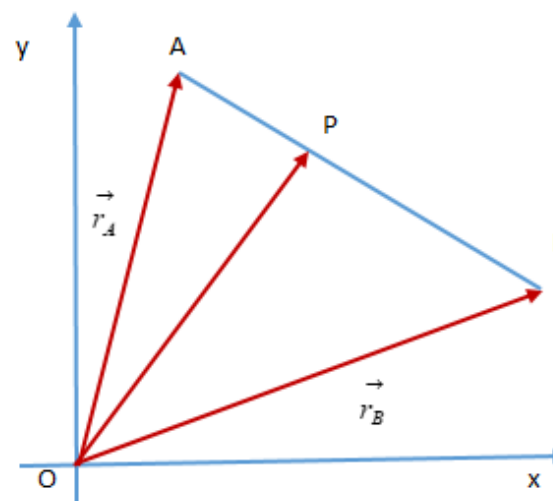
$$\frac{AP}{AB} = \frac{k}{k+1}$$

$$AP = \frac{k}{k+1} AB$$

$$\frac{AP}{PB} = k$$

$$\frac{AB}{PB} = \frac{k+1}{1}$$

$$PB = \frac{1}{k+1} AB$$



a



TG 64 * Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC . Să se determine valoarea parametrului real m astfel încât $\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C + m \vec{r}_G = \vec{0}$.

$$\frac{AG}{GA_1} = 2$$

$$\frac{BA_1}{A_1C} = 1$$

$$k = 1$$

$$\vec{OA_1} = \frac{1}{2} \vec{r}_B + \frac{1}{2} \vec{r}_C$$

$$k = 2$$

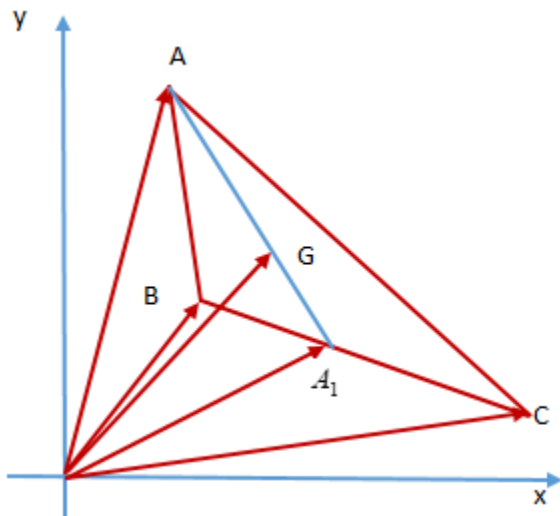
$$\vec{OG} = \frac{1}{3} \vec{r}_A + \frac{2}{3} \vec{OA_1}$$

$$\vec{OG} = \frac{1}{3} \vec{r}_A + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \vec{r}_B + \frac{1}{2} \vec{r}_C \right)$$

$$\vec{OG} = \frac{1}{3} \vec{r}_A + \frac{1}{3} \vec{r}_B + \frac{1}{3} \vec{r}_C$$

$$3\vec{OG} = \vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C$$

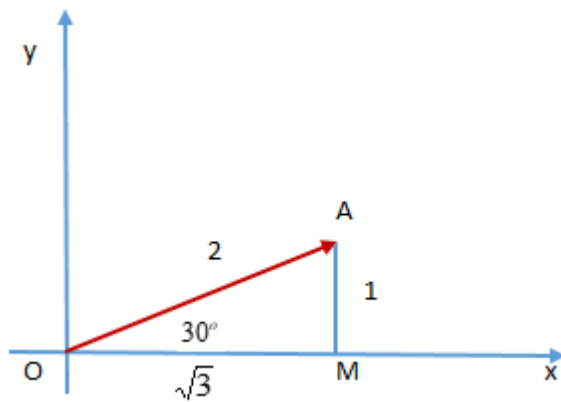
$$\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C - 3\vec{OG} = \vec{0}$$



a



TG 65 * Să se determine vectorul de poziție al punctului A știind că $OA = 2$ și unghiul dintre Ox și OA este de 30° .



$$\sin 30^\circ = \frac{AM}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{AM}{2}$$

$$AM = 1$$

$$\cos 30^\circ = \frac{OM}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{OM}{2}$$

$$OM = \sqrt{3}$$

$$\vec{OA} = \sqrt{3} \vec{i} + \vec{j}$$

b



TG 66 * Se consideră vectorii $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{v} = -2\vec{i} + \vec{j}$ și $\vec{w} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$.
Să se determine valorile parametrilor reali a și b dacă $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

$$\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$$

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$$

$$\vec{v} = -2\vec{i} + \vec{j}$$

$$4\vec{i} + 3\vec{j} = a\vec{i} + 2a\vec{j} - 2b\vec{i} + b\vec{j}$$

$$\vec{w} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$$

$$4\vec{i} + 3\vec{j} = (a - 2b)\vec{i} + (2a + b)\vec{j}$$

$$\begin{cases} a - 2b = 4 \\ 2a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - 2b = 4 \\ 4a + 2b = 6 \end{cases} \Rightarrow 5a = 10 \Rightarrow a = 2$$

$$2 - 2b = 4$$

$$1 - b = 2$$

$$b = -1$$



TG 67 Să se determine numărul pozitiv a știind că vectorii $\vec{u} = a\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{v} = 2\vec{i} + (a-1)\vec{j}$ sunt coliniari.

$$\vec{u} = a\vec{i} + 3\vec{j}$$

$$\vec{v} = 2\vec{i} + (a-1)\vec{j}$$

=====

$$\frac{a}{2} = \frac{3}{a-1}$$

$$a^2 - a - 6 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = -2 < 0$$

e



TG 68 * Se consideră punctul $M(-1, 2)$ și vectorul $\overrightarrow{MN} = -\vec{i} + 3\vec{j}$. Să se determine coordonatele punctului N .

$$M(-1; 2)$$

$$\overrightarrow{MN}(-1; 3) \Rightarrow \overrightarrow{MN}(x+1; y-2)$$

$$N(x; y)$$

$$\begin{cases} x+1 = -1 \\ y-2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow N(-2; 5)$$

c



TG 69 * Fie punctele $A(3,1)$ și $B(1,2)$. Să se determine coordonatele punctului C pentru care $\vec{r}_A + 2\vec{r}_B = \vec{r}_C$.

$A(3;1)$

$$\vec{r}_A + 2\vec{r}_B = \vec{r}_C$$

$B(1;2)$

$$3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{i} + 4\vec{j} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$C(x; y)$

$$5\vec{i} + 5\vec{j} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow C(5;5)$$

b



TG 70 * Fie vectorii $\vec{AB}$ și $\vec{AC}$ cu $|\vec{AB}| = 4$, $|\vec{AC}| = 5$, iar $m(\widehat{BAC}) = 120^\circ$.
Să se calculeze lungimea vectorului $\vec{AB} + \vec{AC}$.

$$|\vec{AB}| = 4$$

$$|\vec{AC}| = 5$$

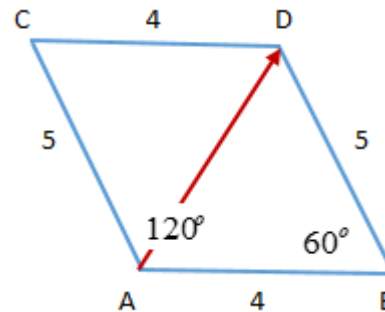
$$\widehat{BAC} = 120^\circ$$

$$AD^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ$$

$$AD^2 = 16 + 25 - 20$$

$$AD^2 = 21$$

$$AD = \sqrt{21}$$



C



TG 71 Se consideră punctele $A(2, 4)$, $B(1, -1)$, $C(4, 1)$. Să se determine ecuația dreptei d pentru care relația $MB^2 + MC^2 = 2MA^2$ este adevărată oricare ar fi punctul M de pe dreaptă.

$A(2;4)$

$B(1;-1)$

$C(4;1)$

$M(x; y)$

$$MB^2 + MC^2 = 2MA^2$$

$$(\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2})^2 + (\sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2})^2 = 2(\sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2})^2$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + x^2 - 8x + 16 + y^2 - 2y + 1 = 2x^2 - 8x + 8 + 2y^2 - 16y + 32$$

$$-2x + 19 = -16y + 40$$

$$-2x + 16y - 21 = 0$$

$$2x - 16y + 21 = 0$$

d



TG 72 Să se scrie ecuația dreptei d_1 ce conține punctul $P(-1, 1)$ și este paralelă cu dreapta $d_2 : 2x + ay - 9 = 0$, $a \in \mathbb{R}$, știind că punctul $Q(4, -1)$ aparține dreptei d_2 .

$$d_2 : 2x + ay - 9 = 0$$

$$d_2 : 8 - a - 9 = 0$$

$$d_2 : a = -1$$

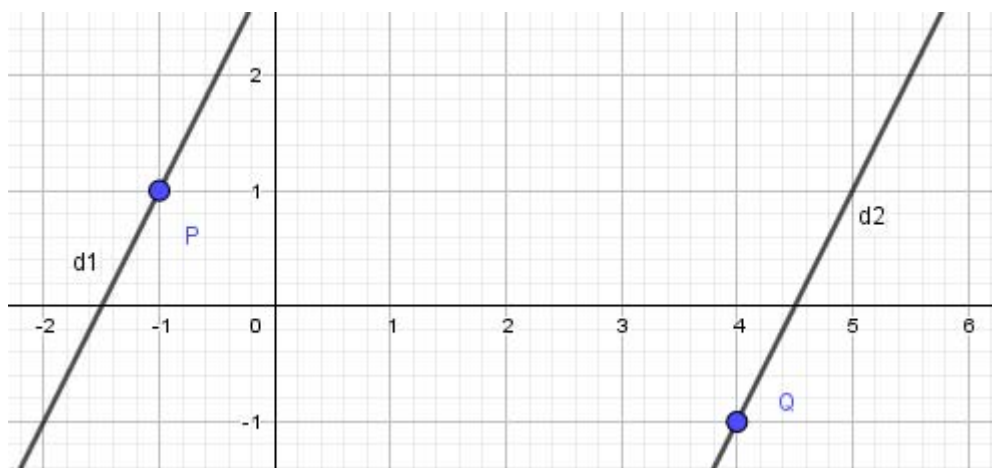
$$d_1 : 2x - y + c = 0$$

$$P \in d_1 \Rightarrow -2 - 1 + c = 0 \Rightarrow c = 3$$

$$d_1 : 2x - y + 3 = 0$$

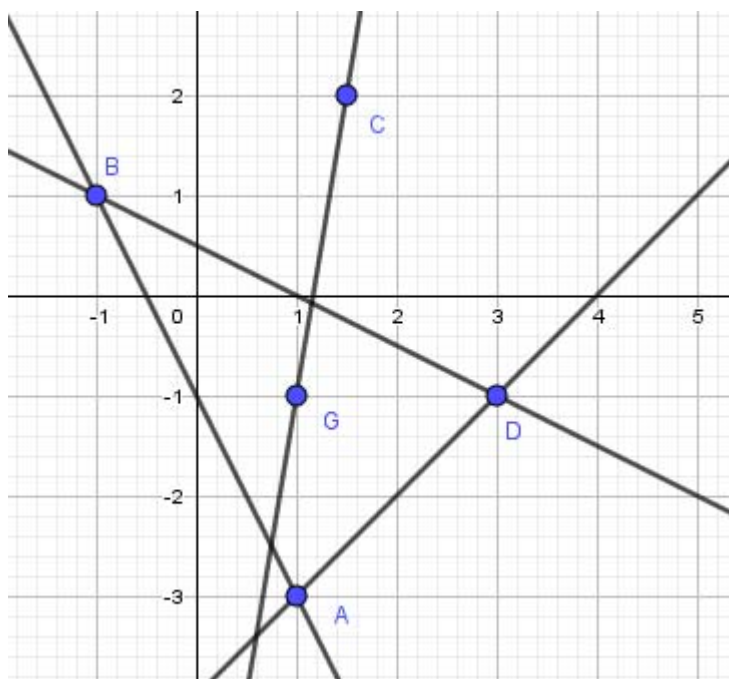
$$d_1 : y = 2x + 3$$

C





TG 73 Se consideră punctele $A(1, -3)$, $B(-1, 1)$, $C(a, 2)$, $D(3, -1)$, $a \in \mathbb{R}$.
Știind că dreptele AB și CD sunt paralele, să se calculeze distanța de la C la
centrul de greutate al triunghiului ABD .



$$m_{AB} = \frac{4}{-2} = -2$$

$$m_{CD} = \frac{-3}{3-a}$$

$$AB \parallel CD \Rightarrow \frac{-3}{3-a} = -2 \Rightarrow -3 = -6 + 2a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$G\left(\frac{1-1+3}{3}; \frac{1-1-3}{3}\right) \Rightarrow G(1; -1)$$

$$CG = \sqrt{\left(\frac{3}{2} - 1\right)^2 + (2 + 1)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 9} = \frac{\sqrt{37}}{2}$$





TG 74 * Se consideră punctele $O(0,0)$, $A(3a,0)$, $B(3a,b)$, $C(0,b)$, $P(a,b)$, $Q(2a,b)$, $a, b > 0$. Dreptele OP și AQ se intersectează în R . Să se determine relația dintre a și b pentru care triunghiul BRC este echilateral.

$$R : \begin{cases} OP : y = \frac{b}{a}x \\ AQ : y = -\frac{b}{a}(x - 3a) \end{cases} \Rightarrow R\left(\frac{3a}{2}; \frac{3b}{2}\right)$$

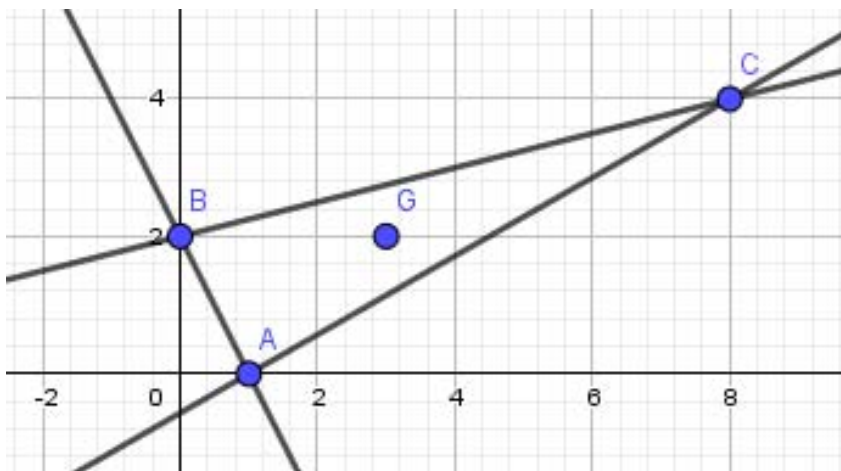
$$BC = BR \Rightarrow \sqrt{(3a - 0)^2 + (b - b)^2} = \sqrt{\left(3a - \frac{3a}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{3b}{2}\right)^2} \Rightarrow 9a^2 = \left(\frac{3a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9a^2 = \frac{9a^2}{4} + \frac{b^2}{4} \Rightarrow b^2 = 27a^2 \Rightarrow b = 3a\sqrt{3}$$

e



TG 75 Dreapta $d : 2x + y - 2 = 0$ intersectează axele de coordonate în punctele A și B . Să se determine coordonatele punctului C astfel ca punctul $G(3, 2)$ să fie centrul de greutate al triunghiului ABC .



$$A: \begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1;0)$$

$$B: \begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow B(0;2)$$

$$\begin{cases} 3 = \frac{a+1+0}{3} \\ 2 = \frac{b+0+2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9 = a+1 \\ 6 = b+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow C(8,4)$$



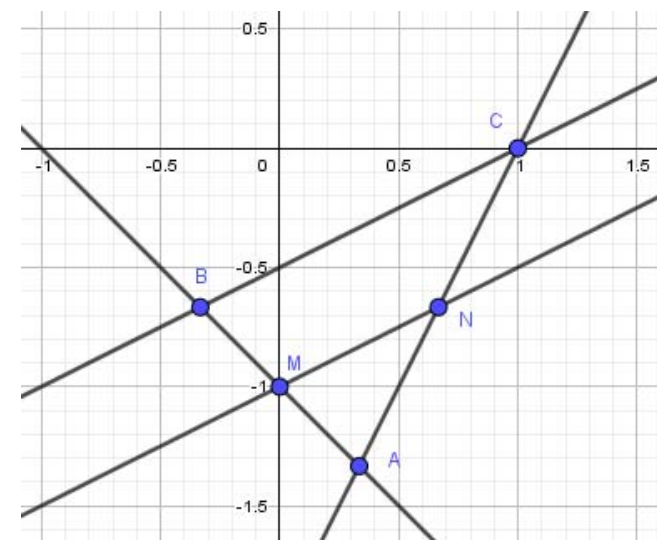


TG 76 Se dau dreptele $AB : x + y + 1 = 0$, $AC : 2x - y - 2 = 0$ și respectiv $MN : -x + 2y + 2 = 0$. Să se calculeze aria triunghiului ABC dacă M este mijlocul lui (AB) și N este mijlocul lui (AC) .

$$M : \begin{cases} AB : x + y + 1 = 0 \\ MN : -x + 2y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow M(0; -1) \quad N : \begin{cases} AC : 2x - y - 2 = 0 \\ MN : -x + 2y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow N\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right) \quad A : \begin{cases} AC : 2x - y - 2 = 0 \\ AB : x + y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{1}{3}; -\frac{4}{3}\right)$$

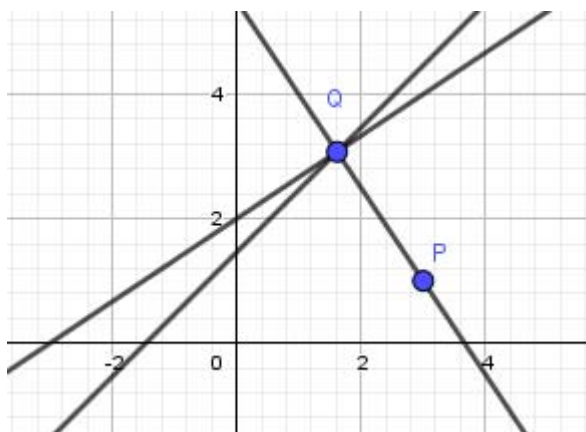
$$B(a; b) \Rightarrow \begin{cases} 0 = \frac{a + \frac{1}{3}}{2} \\ b - \frac{4}{3} = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow B\left(-\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right) \quad C(c; d) \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} = \frac{\frac{1}{3} + c}{2} \\ -\frac{2}{3} = \frac{-\frac{4}{3} + d}{2} \end{cases} \Rightarrow C(1; 0)$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \left| -\frac{2}{9} + 0 - \frac{4}{3} + \frac{2}{3} - 0 - \frac{4}{9} \right| = \frac{1}{2} \left| -\frac{4}{3} \right| = \frac{2}{3}$$





TG 77 Prin proiecția punctului $P(3, 1)$ pe dreapta $d_1 : 2x - 3y + 6 = 0$ se duce o dreaptă d_2 ce face cu axa (Ox) un unghi de 45° . Să se calculeze distanța de la P la d_2 .



$$d_1 : 2x - 3y - 6 = 0 \Rightarrow \vec{n}_{d_1} (2; -3) \Rightarrow \vec{n}_{PQ} (3; 2)$$

$$PQ : 3x + 2y + c = 0$$

$$9 + 2 + c = 0 \Rightarrow c = -11$$

$$PQ : 3x + 2y - 11 = 0$$

$$Q : \begin{cases} 2x - 3y + 6 = 0 \\ 3x + 2y - 11 = 0 \end{cases} \Rightarrow Q\left(\frac{21}{13}; \frac{40}{13}\right)$$

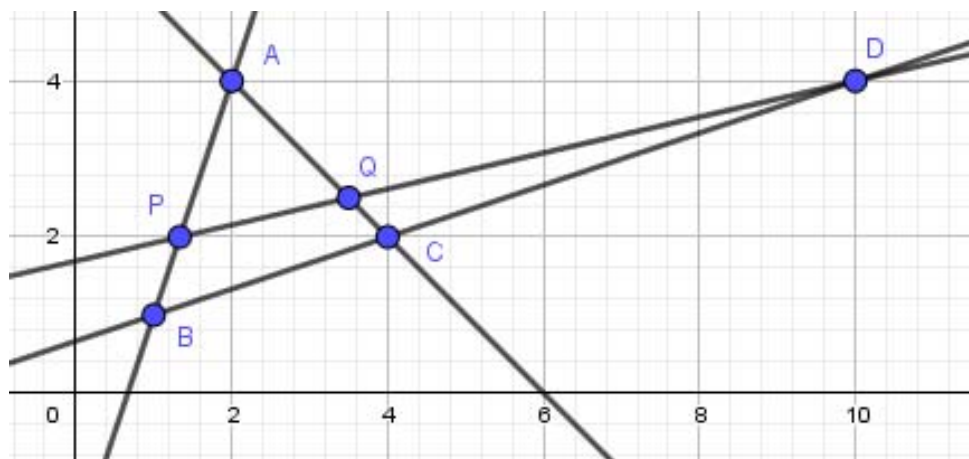
$$d_2 : y - \frac{40}{13} = \tan 45^\circ \left(x - \frac{21}{13}\right) \Rightarrow d_2 : x - y + \frac{19}{13} = 0$$

$$d(P; d_2) = \frac{\left|3 - 1 + \frac{19}{13}\right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{2 + \frac{19}{13}}{\sqrt{2}} = \frac{45}{13\sqrt{2}} = \frac{45\sqrt{2}}{26}$$





TG 78 * Se consideră triunghiul ABC cu $A(2, 4)$, $B(1, 1)$, $C(4, 2)$ și punctele $P \in (AB)$, $Q \in (AC)$ astfel ca $\frac{AP}{PB} = 2, \frac{AQ}{QC} = 3$. Să se afle coordonatele punctului de intersecție al dreptelor BC și PQ .



$$P(a; b) \Rightarrow \begin{aligned} &\vec{AP}(a-2; b-4) \\ &\vec{PB}(1-a; 1-b) \end{aligned}$$

$$\vec{AP} = 2\vec{PB} \Rightarrow \begin{cases} a-2 = 2(1-a) \\ b-4 = 2(1-b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{3} \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{4}{3}; 2\right)$$

$$\vec{AQ} = 3\vec{QC} \Rightarrow Q(c; d) \Rightarrow \begin{cases} \vec{AQ}(c-2; d-4) \\ \vec{QC}(4-c; 2-d) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c-2 = 3(4-c) \\ d-4 = 3(2-d) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = \frac{7}{2} \\ d = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow Q\left(\frac{7}{2}; \frac{5}{2}\right)$$

$$\begin{cases} PQ : 3x - 13y + 22 = 0 \\ BC : x - 3y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 4 \end{cases}$$

d



TG 79 * Se consideră punctele $P_n(n, 2^n - 1)$, $n \in \mathbb{N}$. Să se determine n pentru care aria triunghiului $P_n P_{n+1} P_{n+2}$ este egală cu 8.

$$S_{P_n P_{n+1} P_{n+2}} = 8$$

$$\frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} n & 2^n - 1 & 1 \\ n+1 & 2^{n+1} - 1 & 1 \\ n+2 & 2^{n+2} - 1 & 1 \end{vmatrix} = 8$$

$$\begin{vmatrix} n & 2^n & 1 \\ n+1 & 2^{n+1} & 1 \\ n+2 & 2^{n+2} & 1 \end{vmatrix} = 16$$

$$2^n \cdot \begin{vmatrix} n & 1 & 1 \\ n+1 & 2 & 1 \\ n+2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 16$$

$$2^n \cdot |2n + 4n + 4 + n + 2 - 2n - 4 - 4n - n - 1| = 16$$

$$2^n = 16$$

$$n = 4$$



TG 80 Se consideră punctele $A(1, -2)$ și $B(1, 3)$. Să se determine valoarea parametrului real a pentru care punctul $P(2, a)$ aparține bisectoarei unghiului AOB .

$$\vec{OA}(1; -2)$$

$$\vec{OB}(1; 3)$$

$$\vec{OP}(2; a)$$

$$\vec{OP}(2; a)$$

$$\cos \hat{AOP} = \frac{1 \cdot 2 - 2a}{\sqrt{1+4} \cdot \sqrt{4+a^2}}$$

$$\cos \hat{BOP} = \frac{1 \cdot 2 + 3a}{\sqrt{1+9} \cdot \sqrt{4+a^2}}$$

$$\frac{1 \cdot 2 - 2a}{\sqrt{1+4} \cdot \sqrt{4+a^2}} = \frac{1 \cdot 2 + 3a}{\sqrt{1+9} \cdot \sqrt{4+a^2}}$$

$$\frac{2 - 2a}{\sqrt{5}} = \frac{2 + 3a}{\sqrt{10}}$$

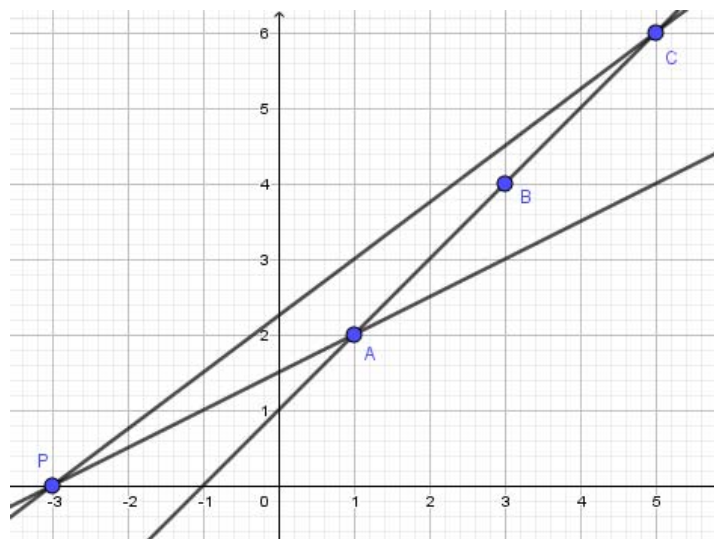
$$2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}a = 2 + 3a$$

$$a(3 + 2\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 2$$

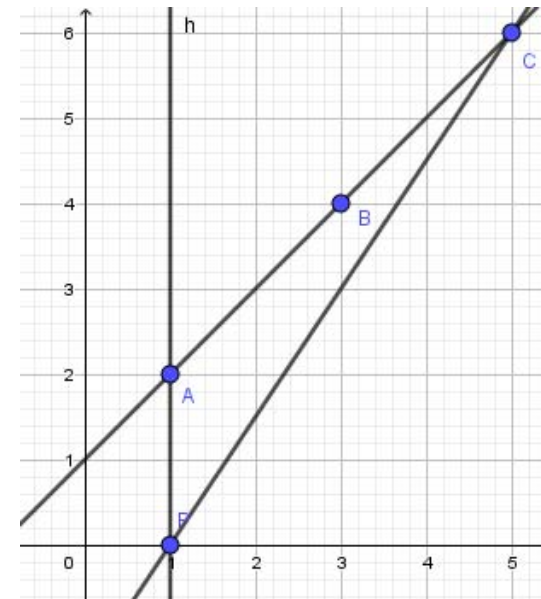
$$a = \frac{2\sqrt{2} - 2}{3 + 2\sqrt{2}} = \frac{(2\sqrt{2} - 2) \cdot (3 - 2\sqrt{2})}{9 - 8} = 6\sqrt{2} - 6 - 8 + 4\sqrt{2} = 10\sqrt{2} - 14$$



TG 81 Prin simetricul punctului $A(1,2)$ față de punctul $B(3,4)$, notat cu C , se duce o dreaptă d ce intersectează axa Ox în punctul P . Să se afle panta dreptei d astfel încât aria triunghiului APC să fie egală cu 4.



$$\begin{cases} 3 = \frac{a+1}{2} \\ 4 = \frac{b+2}{2} \end{cases} \Rightarrow C(5;6)$$



$$S_{APC} = 4 \Rightarrow \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ c & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \Rightarrow |6 + 2c - 6c - 10| = 8 \Rightarrow |-4c - 4| = 8 \Rightarrow |1 + c| = 2$$

$$c_1 = -3 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{6-0}{5+3} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$c_2 = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{6-0}{5-1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$



TG 82 * Fie punctele $O(0,0)$, $A(4,1)$ și $B(1,3)$ și d o dreaptă ce trece prin origine de pantă m . Să se determine panta m știind că pentru orice punct P de pe dreapta d are loc relația: $PA^2 - PB^2 = OA^2 - OB^2$.

$P(1, m)$ (pentru orice punct P de pe dreapta d)

$$PA^2 = (1-4)^2 + (m-1)^2 = 9 + (m-1)^2$$

$$PB^2 = (m-3)^2$$

$$OA^2 = 10$$

$$OB^2 = 17$$

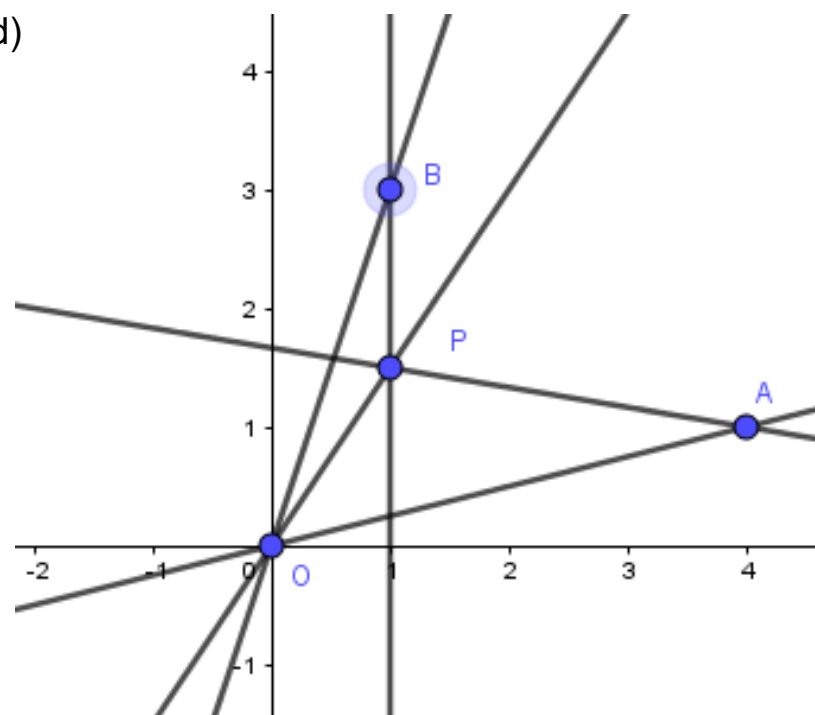
$$PA^2 - PB^2 = OA^2 - OB^2$$

$$9 + m^2 - 2m + 1 - m^2 + 6m - 9 = 7$$

$$4m = 6$$

$$m = \frac{3}{2}$$

b





TG 83 Prin punctul A de intersecție al dreptelor $d_1 : x + y - 2 = 0$ și $d_2 : 2x - y - 4 = 0$ se duce o dreaptă d paralelă cu prima bisectoare. Fie P un punct oarecare al dreptei d , diferit de A . Să se arate că raportul distanțelor de la P la d_1 , respectiv la d_2 este constant și să se determine valoarea lui.

$$\begin{cases} d_1 : x + y - 2 = 0 \\ d_2 : 2x - y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(2;0)$$

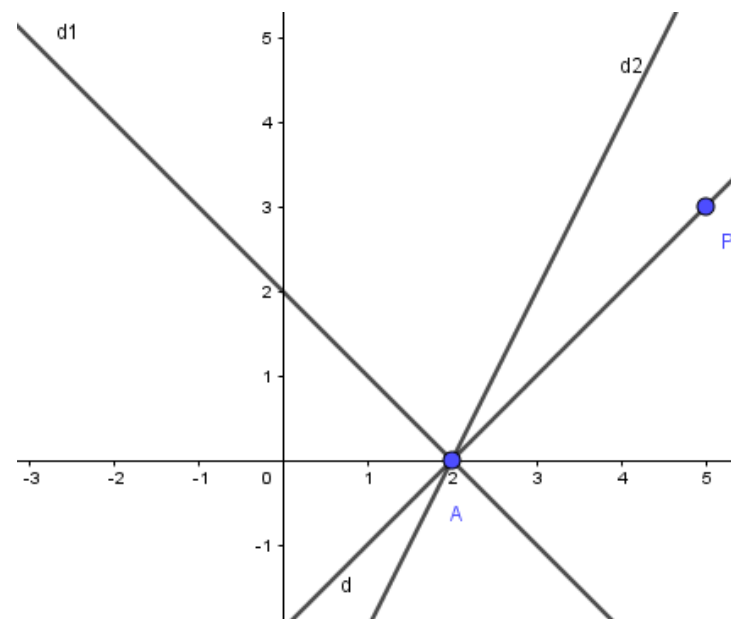
$m_d = 1$ paralelă cu prima bisectoare

$$d : y = x - 2$$

$$P(a; a - 2)$$

$$\frac{d(P, d_1)}{d(P, d_2)} = \frac{\frac{|a + a - 2 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}}}{\frac{|2a - a + 2 - 4|}{\sqrt{4 + 1}}} = \frac{\frac{|2a - 4|}{\sqrt{2}}}{\frac{|a - 2|}{\sqrt{5}}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{10}$$

d





TG 84 Să se determine coordonatele punctului P , situat pe dreapta determinată de punctele $A(a, 0)$, $B(0, b)$, $a, b \in \mathbb{R}^*$, aflat cel mai aproape de originea $O(0, 0)$ a sistemului de axe de coordonate.

$$d : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0 \Rightarrow bx + ay - ab = 0$$

$$\vec{V}_{AB}(-a; b) \Rightarrow \vec{n}_{OP}(-a; b) \Rightarrow OP : -ax + by + c = 0$$

$$O \in OP \Rightarrow c = 0$$

$$OP : -ax + by = 0$$

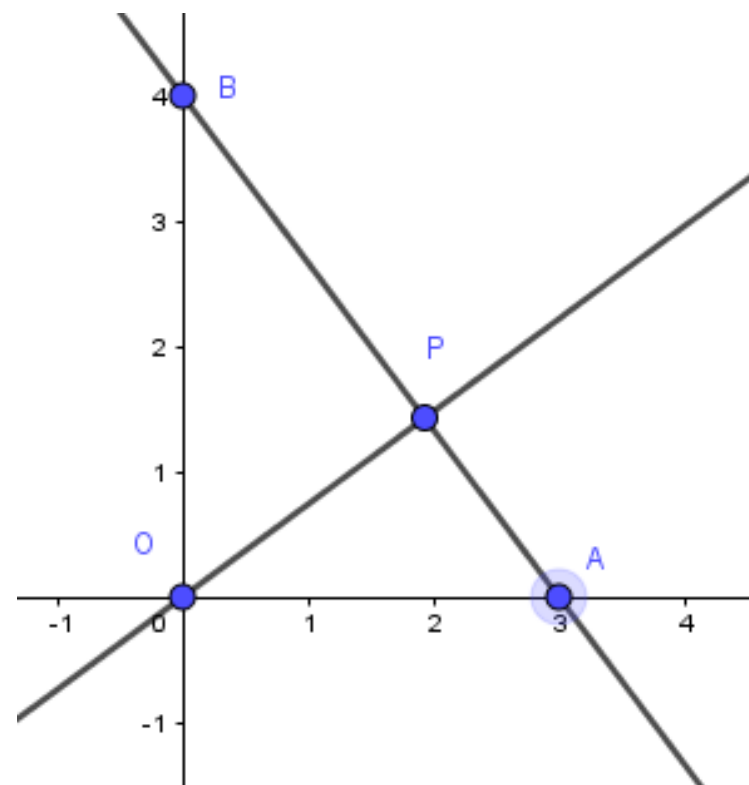
$$P : \begin{cases} -ax + by = 0 \\ bx + ay - ab = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -abx + b^2y = 0 \\ abx + a^2y - a^2b = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$y(a^2 + b^2) = a^2b \Rightarrow y = \frac{a^2b}{a^2 + b^2}$$

$$ax = by \Rightarrow ax = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2} \Rightarrow x = \frac{ab^2}{a^2 + b^2}$$

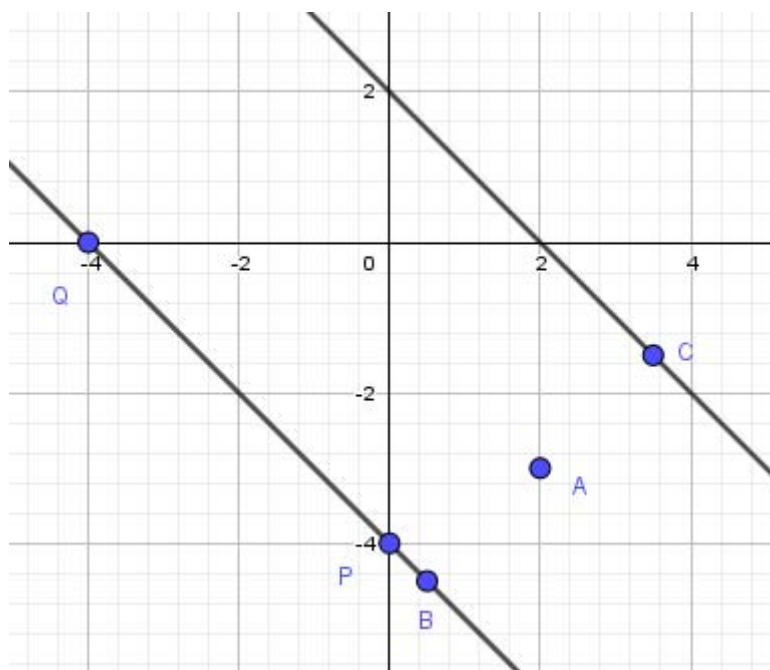
$$P\left(\frac{ab^2}{a^2 + b^2}; \frac{a^2b}{a^2 + b^2}\right)$$

d





TG 85 Simetrica dreptei $d : y = 2 - x$ față de punctul $A(2, -3)$ intersectează axele de coordonate în punctele P și Q . Să se calculeze aria triunghiului POQ .



$$y = -x + 2 \Rightarrow m_{PQ} = -1$$

$$m_{BC} = 1$$

$$C: \begin{cases} BC: y + 3 = x - 2 \\ d: y = -x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x - 5 \\ y = -x + 2 \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{7}{2}; -\frac{3}{2}\right)$$

$$B: \begin{cases} 2 = \frac{\frac{7}{2} + a}{2} \\ -\frac{3}{2} + b \\ -3 = \frac{2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = \frac{7}{2} + a \\ -6 = -\frac{3}{2} + b \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{1}{2}; -\frac{9}{2}\right)$$

$$PQ: y + \frac{9}{2} = -(x - \frac{1}{2}) \Rightarrow 2y + 9 = -2x + 1 \Rightarrow x + y + 4 = 0$$

$$P(0; -4)$$

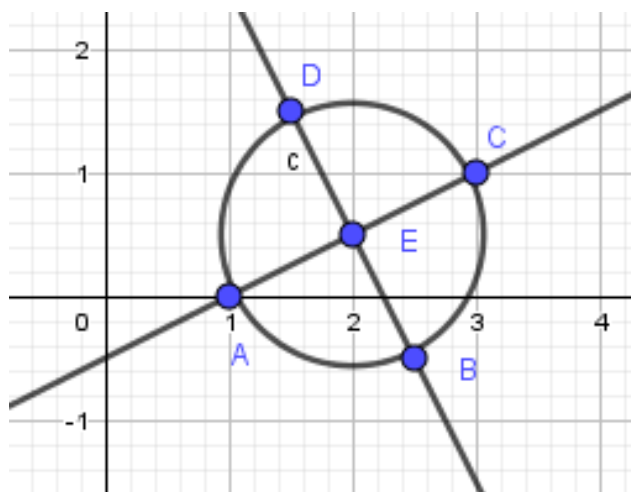
$$Q(-4; 0)$$

$$S_{POQ} = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8$$

a



TG 86 Se consideră punctele $A(1, 0)$ și $C(3, 1)$. Dacă (AC) este o diagonală a pătratului $ABCD$, să se afle coordonatele vârfurilor B și D .



$$E(2; \frac{1}{2})$$

$$\vec{v}_{AC}(2;1) \Rightarrow \vec{n}_{AC}(2;1) \Rightarrow BD: 2x + y + c = 0$$

$$E \in BD \Rightarrow 2 \cdot 2 + \frac{1}{2} + c = 0 \Rightarrow c = -\frac{9}{2}$$

$$BD: 2x + y - \frac{9}{2} = 0$$

$$R = AE = \sqrt{(2-1)^2 + (\frac{1}{2}-0)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-\frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4} \\ y = -2x + \frac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow (x-2)^2 + (-2x + \frac{9}{2} - \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4}$$

$$(x-2)^2 + (-2x+4)^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{5}{2}; y_1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow B(\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}) \\ x_2 = \frac{3}{2}; y_2 = \frac{3}{2} \Rightarrow D(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}) \end{cases}$$

C



TG 87 Se consideră dreptele concurente $d_1 : x+2y-9=0$, $d_2 : x-2y+3=0$ și $d_3 : 2x+ay-3=0$, $a \in \mathbb{R}$. O dreaptă d ce trece prin punctul $O(0,0)$ intersectează dreptele d_1, d_2, d_3 respectiv în punctele distincte A, B, C . Să se afle panta dreptei d astfel ca $(AB) \equiv (BC)$.

$$\begin{cases} d_1 : x+2y-9=0 \\ d_2 : x-2y+3=0 \end{cases} \Rightarrow x=3; y=3 \quad \text{punctul comun este } (3;3) \Rightarrow a=-1$$

$$O \in d \Rightarrow y=mx$$

$$A : \begin{cases} d_1 : x+2y-9=0 \\ y=mx \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{9}{1+2m}; \frac{9m}{1+2m}\right) \quad B : \begin{cases} d_2 : x-2y+3=0 \\ y=mx \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{3}{2m-1}; \frac{3m}{2m-1}\right)$$

$$C : \begin{cases} d_3 : 2x-y-3=0 \\ y=mx \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{3}{2-m}; \frac{3m}{2-m}\right)$$

$$AB = AC \quad \text{după simplificare:}$$

$$\frac{144}{(2m-1)^2} = \frac{225}{(2-m)^2}$$

$$\frac{12}{2m-1} = \frac{15}{2-m}$$

$$m_1 = \frac{39}{42}$$

$$m_1 = \frac{13}{14}$$

$$\frac{12}{2m-1} = -\frac{15}{2-m}$$

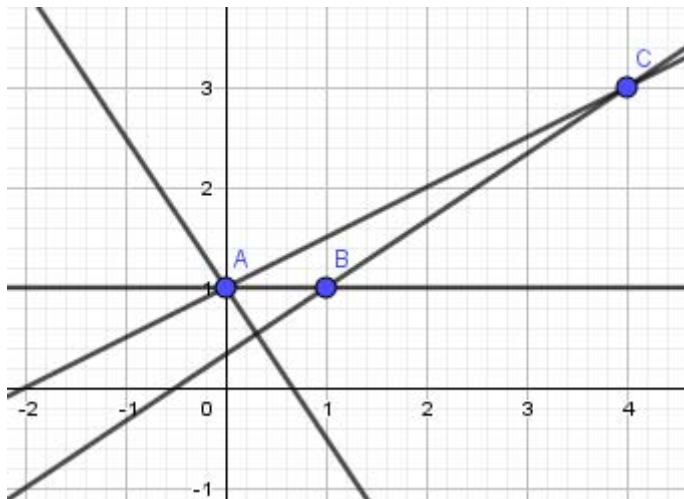
$$m_1 = -\frac{9}{18}$$

$$m_2 = -\frac{1}{2}$$

C



TG 88 Se dau punctele $A(0, 1)$, $B(1, 1)$ și $C(4, 3)$. Fie $y = mx + n$ ecuația înălțimii triunghiului ABC dusă din A și $s = m + n$. Atunci:



$$m_{BC} = \frac{3-1}{4-1} = \frac{2}{3}$$

$$m = -\frac{3}{2}$$

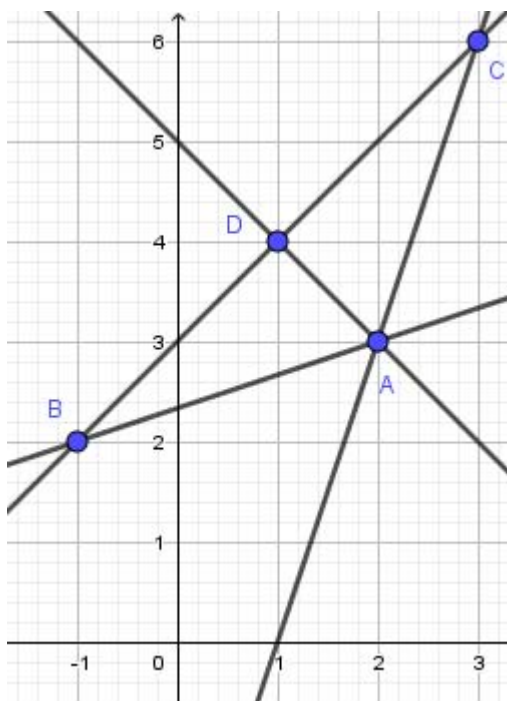
$$y = -\frac{3}{2}x + n \Rightarrow n = 1$$

$$s = m + n = -\frac{1}{2}$$

C



TG 89 Se dau punctele $A(2,3)$, $B(-1,2)$ și $C(3,6)$. Fie $y = mx + n$ ecuația medianeî dusă din A în triunghiul ABC . Să se calculeze $s = m + n$.



$$D\left(\frac{3-1}{2}; \frac{6+2}{2}\right)$$

$$D(1;4)$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x + 8 + y - 3 - 2y - 4x = 0$$

$$-x - y + 5 = 0$$

$$y = -x + 5$$

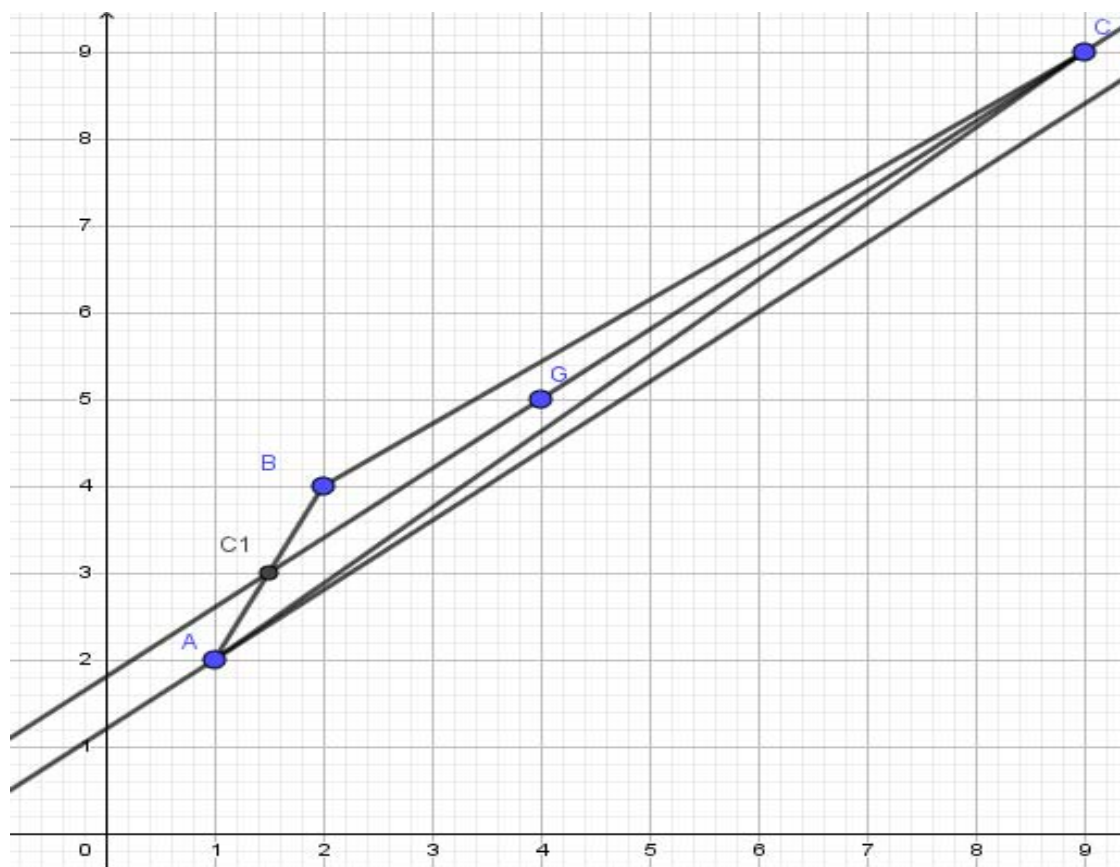
$$m = -1 \quad n = 5$$

$$s = m + n = 4$$

b



TG 90 Fie $A(1,2)$, $B(2,4)$ și fie $G(4,5)$ centrul de greutate al triunghiului ABC . Ecuația dreptei care trece prin A și este paralelă cu mediana dusă din vârful C al triunghiului ABC este:



$$\begin{cases} 4 = \frac{1+2+x_c}{3} \\ 5 = \frac{2+4+y_c}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_c = 9 \\ y_c = 9 \end{cases}$$

$$m_{CC_1} = \frac{9-5}{9-4} = \frac{4}{5}$$

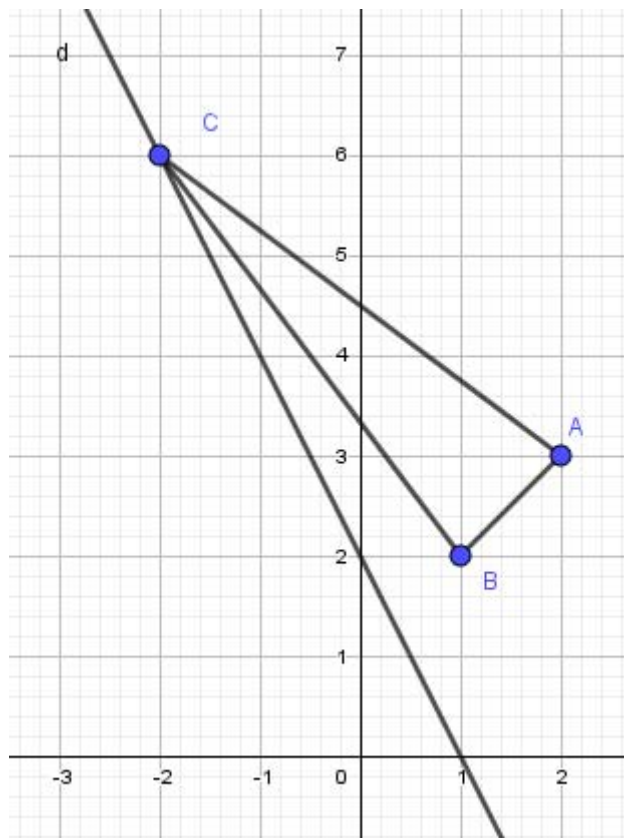
$$d : y - 2 = \frac{4}{5}(x - 1)$$

$$d : -4x + 5y - 6 = 0$$

f



TG 91 Se dau punctele $A(2, 3)$ și $B(1, 2)$. Fie $C(a, b)$ un punct de pe dreapta $2x + y - 2 = 0$ astfel încât triunghiul ABC este isoscel cu baza AB și $d = b - a$. Atunci:



$$\begin{cases} 2a + b - 2 = 0 \\ AC = BC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b - 2 = 0 \\ \sqrt{(a-2)^2 + (b-3)^2} = \sqrt{(a-1)^2 + (b-2)^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 2 - 2a \\ a^2 - 4a + 4 + b^2 - 6a + 9 = a^2 - 2a + 1 + b^2 - 4b + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 2 - 2a \\ -2a - 2b + 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2 - 2a \\ a + b = 4 \end{cases} \Rightarrow a + 2 - 2a = 4$$

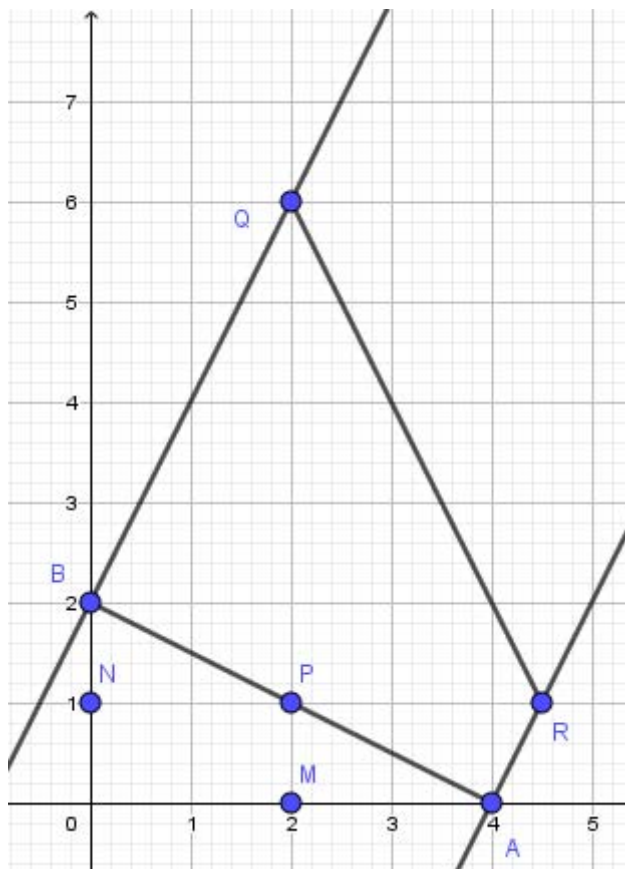
$$a = -2 \quad b = 6$$

$$d = b - a = 8$$

b



TG 92 Se dau punctele $A(4,0)$ și $B(0,2)$. Fie M, N proiecțiile punctului P , mijlocul segmentului (AB) , pe Ox , respectiv Oy . Dacă Q este punctul de intersecție al perpendicularei în B pe dreapta AB cu dreapta MP și R punctul de intersecție al perpendicularei în A pe AB cu dreapta NP , să se calculeze aria patrulaterului $ABQR$.



$$m_{AB} = \frac{0-2}{4-0} = -\frac{1}{2}$$

$$Q(2;a) \quad R(b;1)$$

$$m_{AR} = 2$$

$$m_{BQ} = 2$$

$$AR: y - 0 = 2(x - 4)$$

$$BQ: y - 2 = 2(x - 0)$$

$$2x - y - 8 = 0$$

$$2x - y + 2 = 0$$

$$2b - 1 - 8 = 0$$

$$4 - a + 2 = 0$$

$$b = \frac{9}{2} \Rightarrow R\left(\frac{9}{2}; 1\right)$$

$$a = 6 \Rightarrow Q(2;6)$$

$$AR = \sqrt{\left(\frac{9}{2} - 4\right)^2 + (1 - 0)^2}$$

$$BQ = \sqrt{(2 - 0)^2 + (6 - 2)^2}$$

$$BQ = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$AR = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

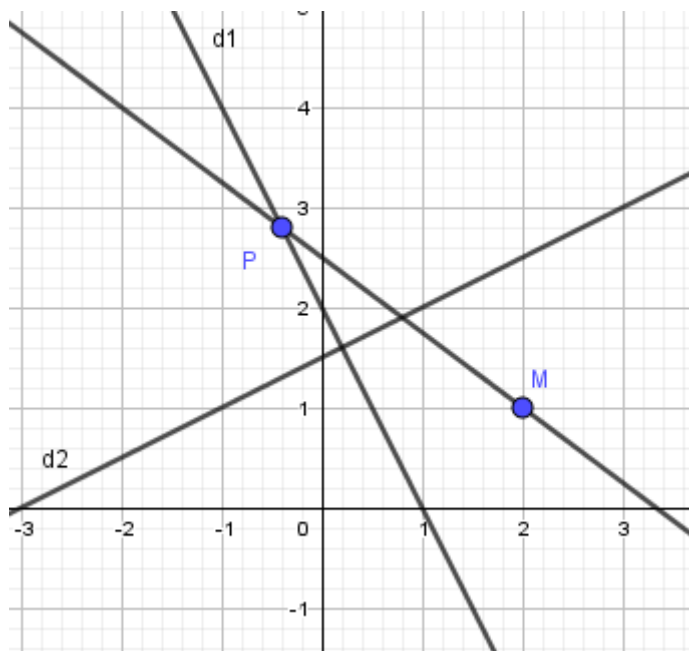
$$AB = \sqrt{(2 - 0)^2 + (6 - 2)^2} = 2\sqrt{5}$$

$$S_{ABQR} = \frac{2\sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{2}}{2} \cdot 2\sqrt{5} = \frac{5\sqrt{5}}{4} \cdot 2\sqrt{5} = \frac{25}{2}$$

a



TG 93 Se dau dreptele $d_1 : 2x + y - 2 = 0$, $d_2 : x - 2y + 3 = 0$ și punctul $M(2, 1)$. Fie punctul $P(a, b)$ pe dreapta d_1 astfel încât mijlocul segmentului (MP) să se afle pe dreapta d_2 și $s = \frac{b}{a}$. Atunci:



$$P(a; 2 - 2a)$$

Mijlocul segmentului MP este $(\frac{2+a}{2}; \frac{3-2a}{2})$

$$\frac{2+a}{2} - 2\frac{3-2a}{2} + 3 = 0$$

$$2 + a - 6 + 4a + 6 = 0$$

$$5a = -2$$

$$a = -\frac{2}{5}$$

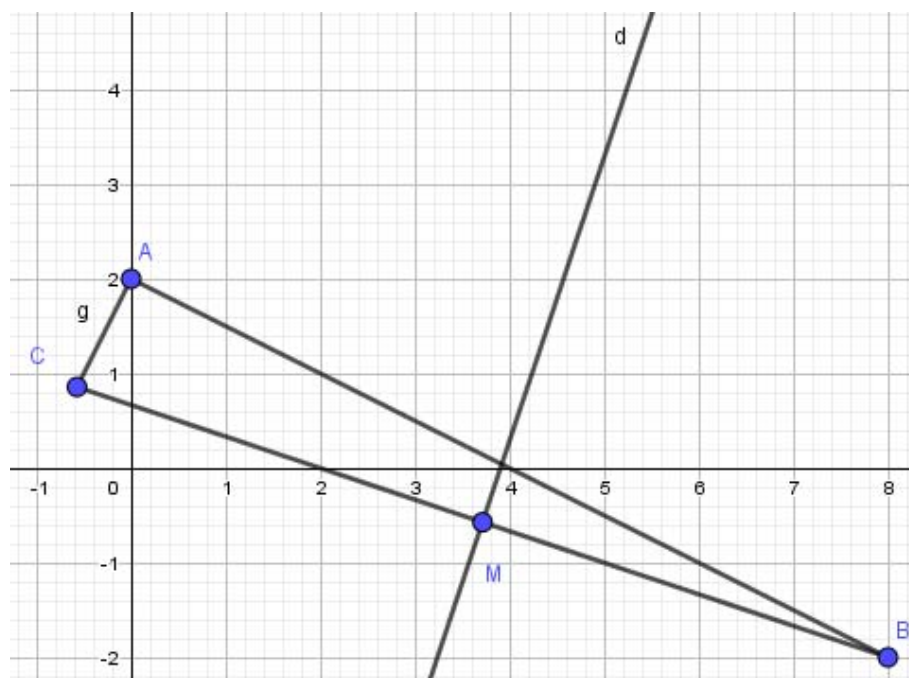
$$b = \frac{14}{5}$$

$$s = \frac{b}{a} = \frac{\frac{14}{5}}{-\frac{2}{5}} = -7$$





TG 94 Se dau dreptele $AB : x + 2y - 4 = 0$, $AC : 2x - y + 2 = 0$ și $BC : -x - 3y + 2 = 0$. Ecuația dreptei ce trece prin mijlocul segmentului (BC) și este paralelă cu înălțimea dusă din vârful A este:



$$A: \begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ 2x - y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(0;2)$$

$$B: \begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ -x - 3y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(8;-2)$$

$$C: \begin{cases} 2x - y + 2 = 0 \\ -x - 3y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(-\frac{4}{7}; \frac{6}{7})$$

$$M(\frac{8 - \frac{4}{7}}{2}; \frac{-2 - \frac{6}{7}}{2}) \Rightarrow M(\frac{26}{7}; -\frac{4}{7})$$

$$m_{BC} = \frac{-2 - \frac{6}{7}}{8 + \frac{4}{7}} = -\frac{20}{60} = -\frac{1}{3} \Rightarrow m_d = 3$$

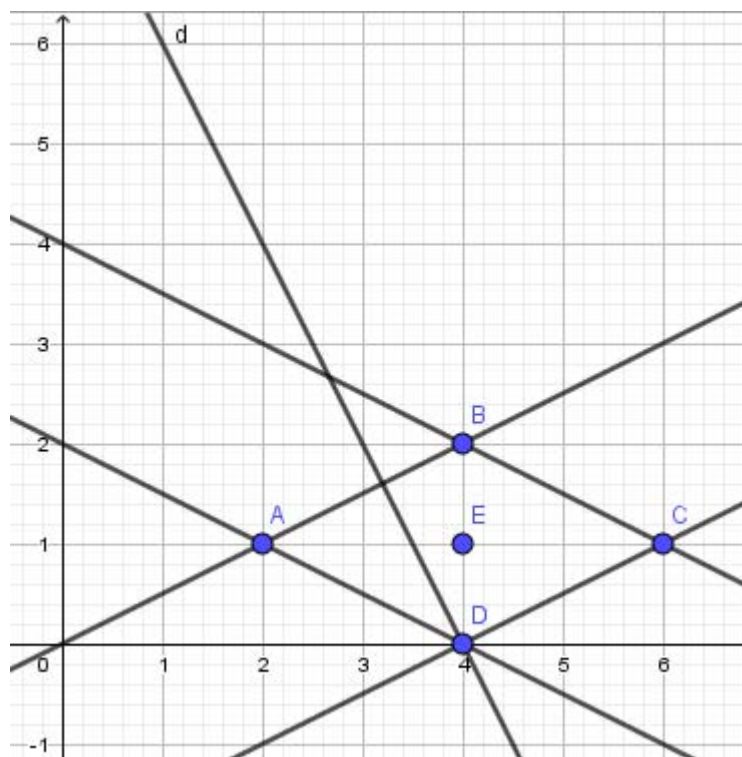
$$d: y + \frac{4}{7} = 3(x - \frac{26}{7})$$

$$d: 21x - 7y - 82 = 0$$

f



TG 95 * Se consideră paralelogramul $ABCD$ cu $A(2, 1)$, $B(4, 2)$ și $C(6, 1)$.
Dacă $d : y = mx + n$ este ecuația perpendicularei pe AB dusă prin vârful D
al paralelogramului și $s = m + n$, atunci:



$$E\left(\frac{2+6}{2}; \frac{1+1}{2}\right) \Rightarrow E(4;1)$$

$$m_{AB} = \frac{2-1}{4-2} = \frac{1}{2} \Rightarrow m = -2$$

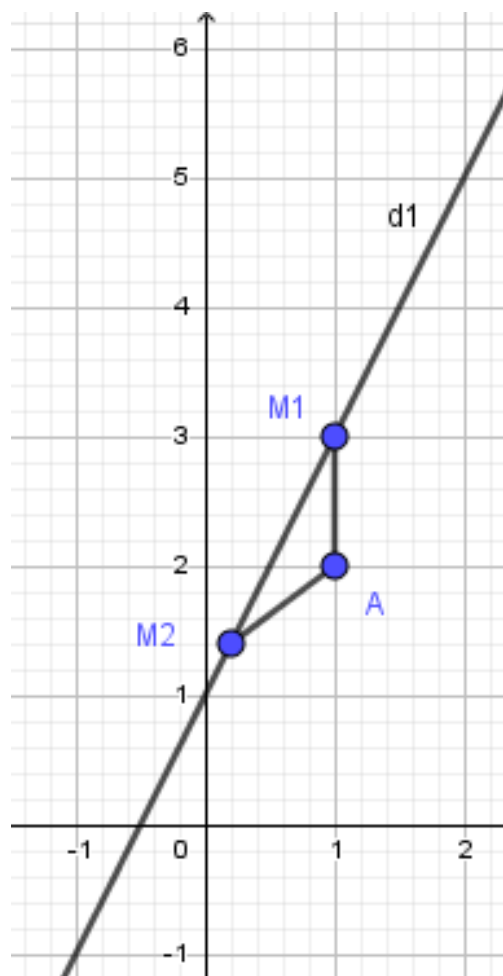
$$y = -2x + n \Rightarrow 0 = -8 + n \Rightarrow n = 8$$

$$s = m + n = 6$$

d



TG 96 * Să se afle coordonatele punctelor situate pe dreapta $d_1 : 2x - y + 1 = 0$ aflate la distanța $d = 1$ de punctul $A(1, 2)$.



$$M(a; 2a + 1)$$

$$MA = 1$$

$$\sqrt{(a-1)^2 + (2a+1-2)^2} = 1$$

$$a^2 - 2a + 1 + 4a^2 - 4a + 1 = 1$$

$$5a^2 - 6a + 1 = 0$$

$$\Delta = 36 - 20 = 16$$

$$a_{1,2} = \frac{6 \pm 4}{10}$$

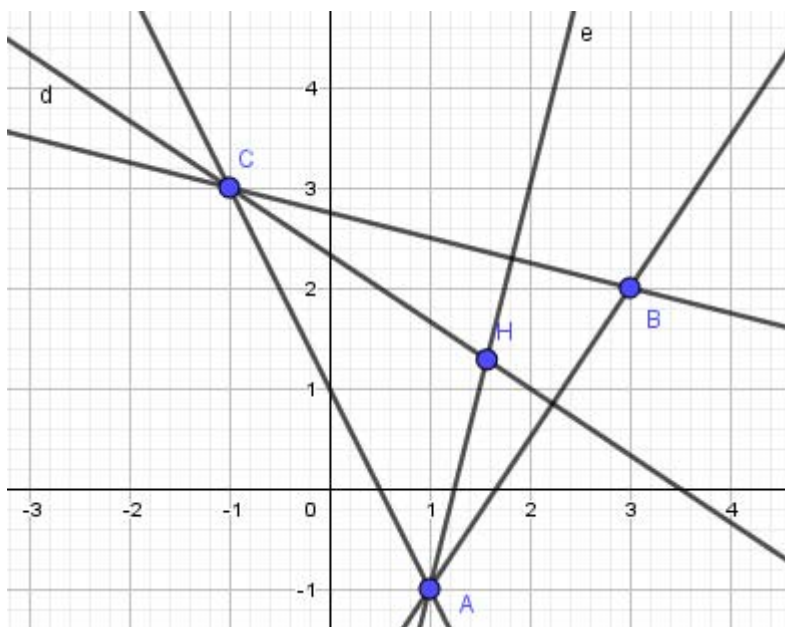
$$a_1 = 1 \Rightarrow M_1(1; 3)$$

$$a_2 = \frac{1}{5} \Rightarrow M_2\left(\frac{1}{5}; \frac{7}{5}\right)$$

b



TG 97 * Fie triunghiul ABC cu vârfurile $A(1, -1)$, $B(3, 2)$ și $C(-1, 3)$. Să se determine coordonatele ortocentrului H al triunghiului ABC .



$$m_{AB} = \frac{2+1}{3-1} = \frac{3}{2}$$

$d :$

$$y - 3 = -\frac{2}{3}(x + 1)$$

$$3x - 9 = -2x - 2$$

$$2x + 3y - 7 = 0$$

$$m_{BC} = \frac{3-2}{-1-3} = \frac{-1}{4}$$

$e :$

$$y + 1 = 4(x - 1)$$

$$4x - y - 5 = 0$$

$$H : \begin{cases} 2x + 3y - 7 = 0 \\ 4x - y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y - 7 = 0 \\ 12x - 3y - 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow 14x = 22 \Rightarrow x = \frac{11}{7}$$

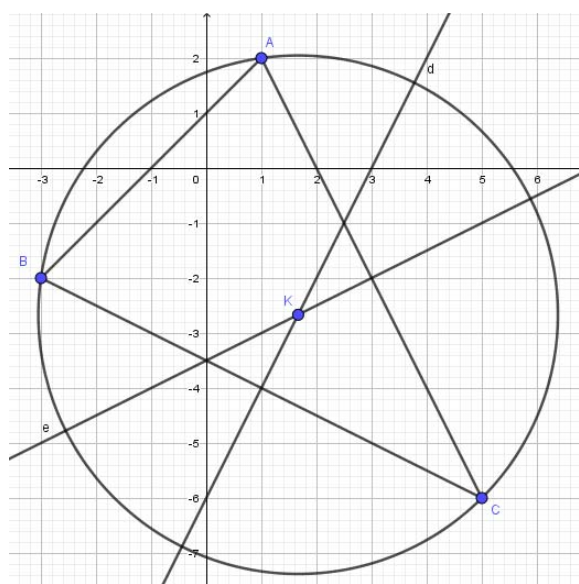
$$y = 4x - 5 = \frac{44}{7} - \frac{35}{7} = \frac{9}{7}$$

$$H\left(\frac{11}{7}; \frac{9}{7}\right)$$

b



TG 98 * Fie în planul xOy triunghiul având laturile de ecuații $x - y + 1 = 0$, $2x + y - 4 = 0$ și $x + 2y + 7 = 0$. Să se determine coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC .



$$A: \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 2x + y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1; 2)$$

$$B: \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + 2y + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(-3; -2)$$

$$C: \begin{cases} x + 2y + 7 = 0 \\ 2x + y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(5; -6)$$

$$m_{BC} = \frac{-6 + 2}{5 + 3} = -\frac{1}{2} \Rightarrow m_d = 2$$

$$d: y + 4 = 2(x - 1)$$

$$d: -2x + y + 6 = 0$$

$$m_{AC} = \frac{2 + 6}{1 - 5} = -2 \Rightarrow m_e = \frac{1}{2}$$

$$e: y + 2 = \frac{1}{2}(x - 3)$$

$$e: -x + 2y + 7 = 0$$

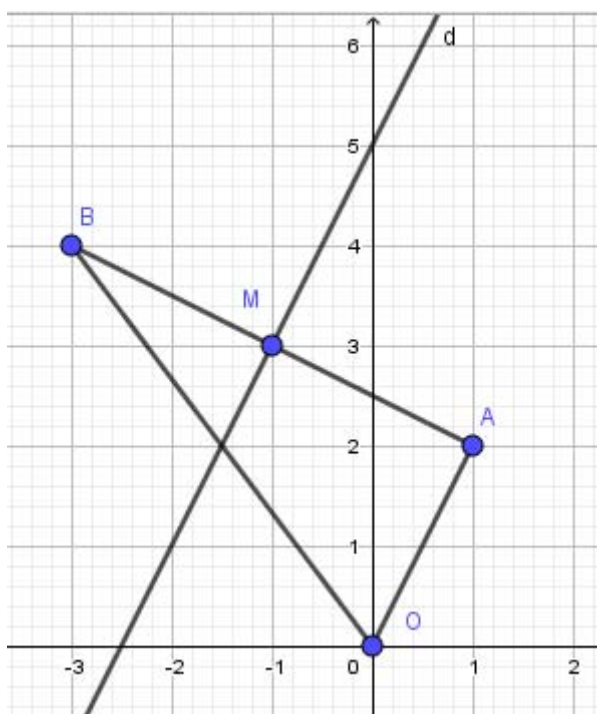
$$\begin{cases} -2x + y + 6 = 0 \\ -x + 2y + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + y + 6 = 0 \\ 2x - 4y - 14 = 0 \end{cases} \Rightarrow -3y - 8 = 0 \Rightarrow y = -\frac{8}{3} \quad x = \frac{5}{3}$$

$$K\left(\frac{5}{3}; -\frac{8}{3}\right)$$





TG 99 Fie punctele $O(0,0)$, $A(1,2)$ și dreapta $d : 2x - y + 5 = 0$. Să se determine perimetrul triunghiului OAB , unde B este simetricul lui A față de dreapta d .



$$m_d = 2 \Rightarrow m_{AB} = -\frac{1}{2} \Rightarrow AB: y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1)$$

$$M : \begin{cases} y = 2x + 5 \\ y = 2 - \frac{1}{2}(x - 1) \end{cases} \Rightarrow 2x + 5 = 2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$4x + 10 = 4 - x + 1$$

$$5x = -5$$

$$x = -1$$

$$y = 3$$

$$M(-1;3)$$

$$\begin{cases} -1 = \frac{a+1}{2} \\ 3 = \frac{b+2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow B(-3;4)$$

$$AO = \sqrt{5}$$

$$BO = 5$$

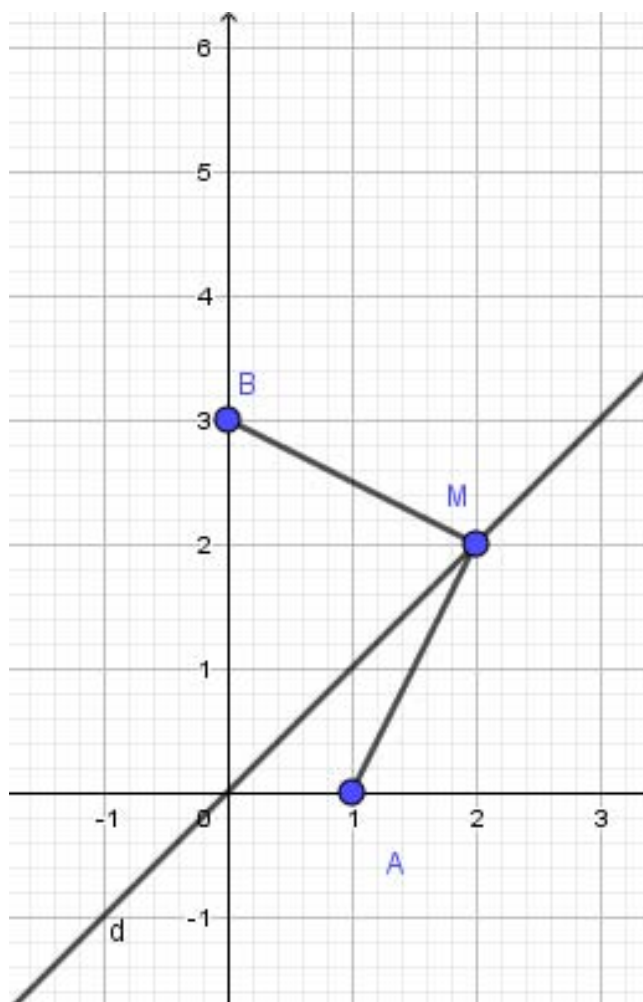
$$AB = 2\sqrt{5}$$

$$P_{AOB} = 5 + 3\sqrt{5}$$

d



TG 100 * Se consideră punctele $A(1, 0)$, $B(0, 3)$. Să se afle punctul M situat pe prima bisectoare a axelor de coordonate, astfel ca $MA \perp MB$.



$$m_{BM} = \frac{a-3}{a-0} = \frac{a-3}{a}$$

$$m_{AM} = \frac{a}{a-1}$$

$$m_{AM} \cdot m_{BM} = -1$$

$$\frac{a}{a-1} \cdot \frac{a-3}{a} = -1$$

$$a-3 = -a+1$$

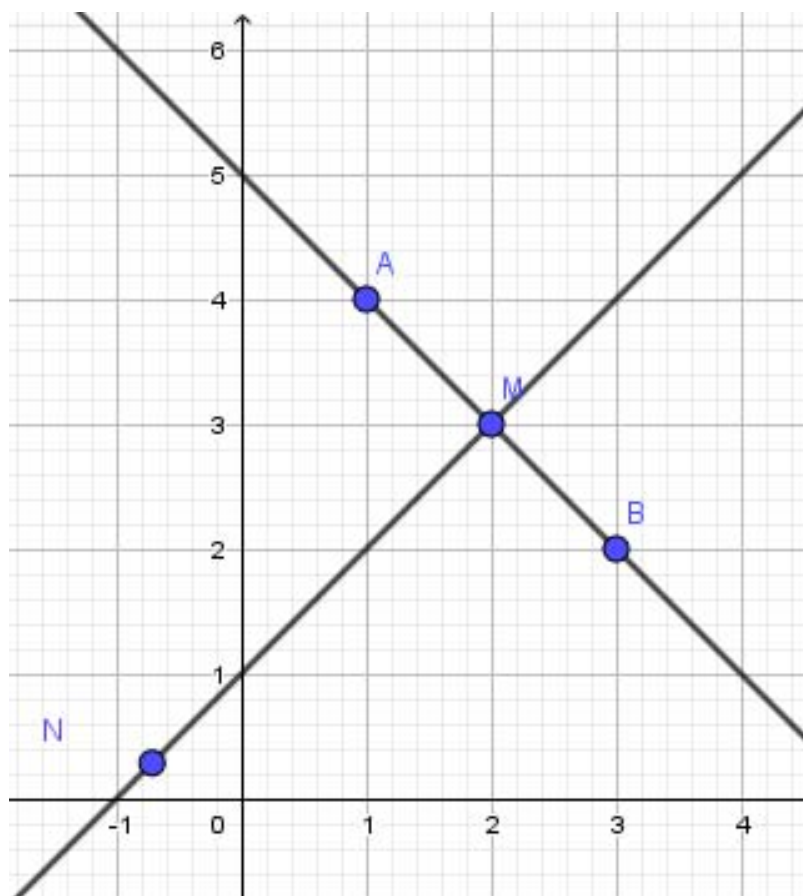
$$2a = 4$$

$$a = 2$$

b



TG 101 * Se consideră punctele $A(1, 4)$, $B(3, 2)$ și mediatoarea d a segmentului (AB) . Care dintre următoarele puncte aparțin lui d ?



$$m_{AB} = \frac{2-4}{3-1} = -\frac{2}{2} = -1$$

$$m_d = 1$$

$$d : y - 3 = x - 2$$

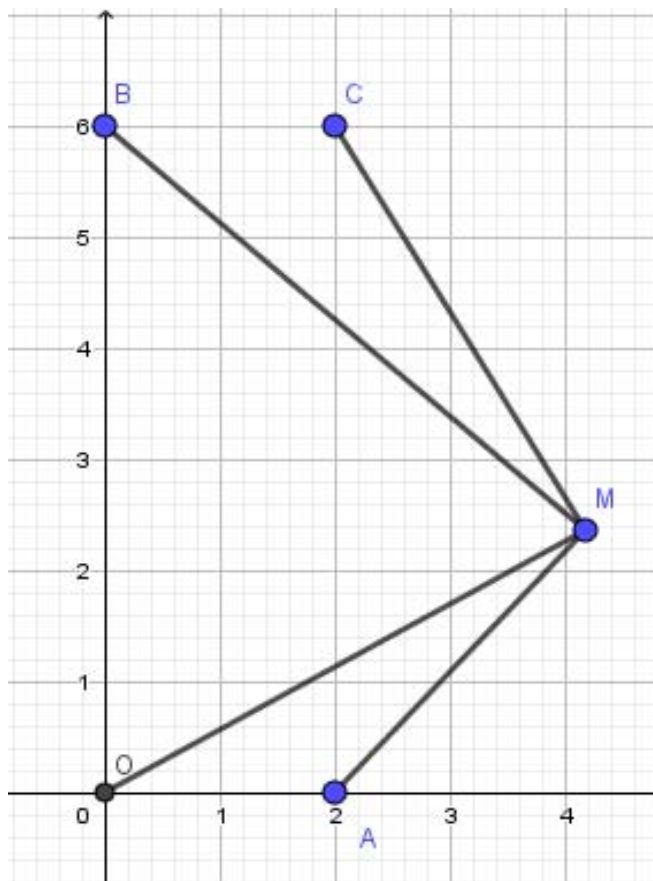
$$d : y = x + 1$$

$$N(-\frac{5}{7}; \frac{2}{7})$$

C



TG 102 * Se consideră punctele $A(2,0)$, $B(0,6)$ și fie C al patrulea vârf al dreptunghiului $OACB$ (unde O este originea axelor). Fie $M(x_0, y_0)$ cu $x_0 \neq 0$ astfel încât $AM \perp BM$, $M \neq C$. Fie m_{CM} panta dreptei CM , m_{OM} panta dreptei OM , iar $p = m_{CM} \cdot m_{OM}$. Să se afle p .



$$m_{BM} \cdot m_{AM} = -1$$

$$\frac{y_0 - 6}{x_0} \cdot \frac{y_0}{x_0 - 2} = -1$$

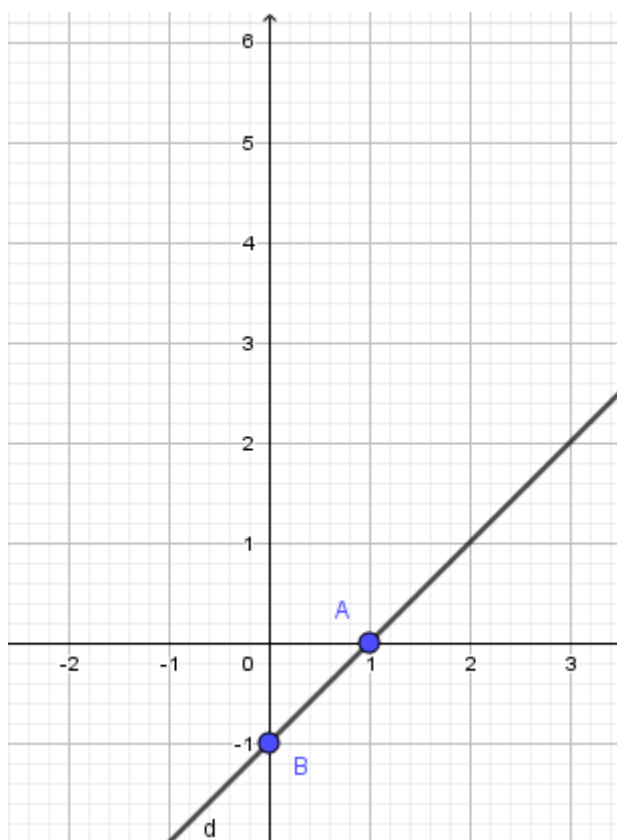
$$\frac{y_0 - 6}{x_0 - 2} = -\frac{x_0}{y_0}$$

$$p = m_{CM} \cdot m_{OM} = \frac{y_0 - 6}{x_0 - 2} \cdot \frac{y_0}{x_0} = -\frac{x_0}{y_0} \cdot \frac{y_0}{x_0} = -1$$

f



TG 103 * Fie dreapta $d : (a-1)x + ay + a = 0$, $0 < a < 1$ și fie $\{A\} = d \cap Ox$, $\{B\} = d \cap Oy$. Dacă $\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = 2$, atunci



$$\{A\} = d \cap Ox \Rightarrow A\left(\frac{a}{1-a}; 0\right) \Rightarrow OA = \sqrt{\frac{a^2}{(1-a)^2}} = \frac{a}{1-a}$$

$$\{B\} = d \cap Oy \Rightarrow B(0; -1) \Rightarrow OB = 1$$

$$\frac{1-a}{a} + 1 = 2$$

$$\frac{1-a}{a} = 1$$

$$1-a = a$$

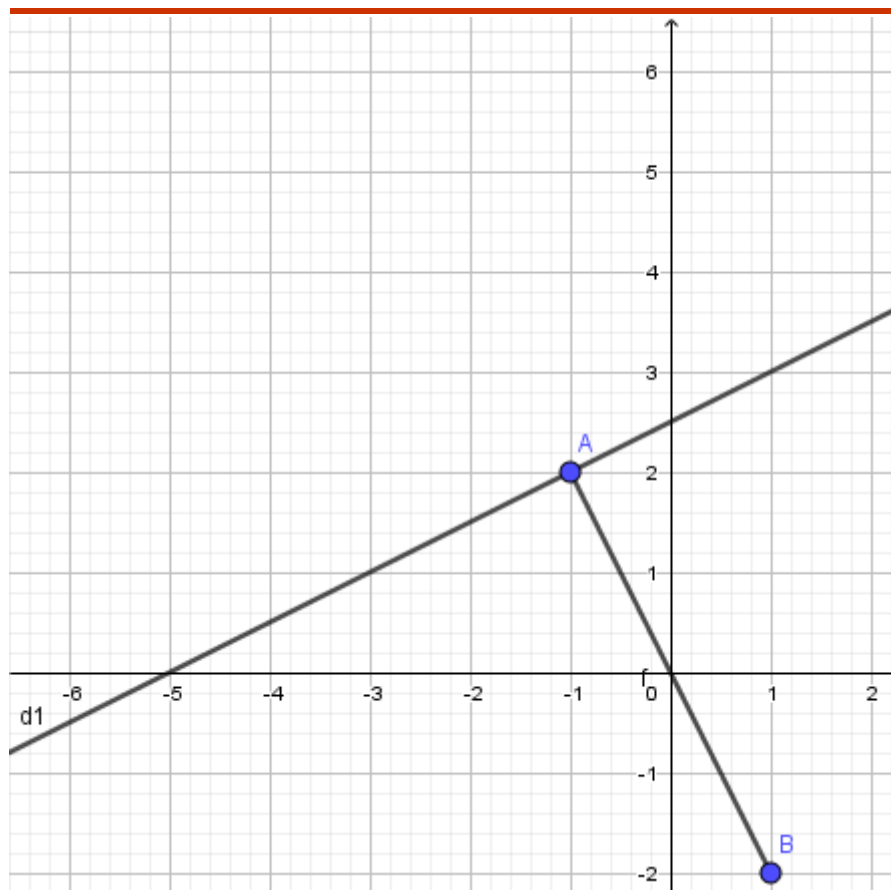
$$2a = 1$$

$$a = \frac{1}{2}$$





TG 104 * Distanța de la punctul B , simetricul punctului $A(-1, 2)$ față de $O(0, 0)$, originea axelor de coordonate, la dreapta $d_1 : x - 2y + 5 = 0$ este:

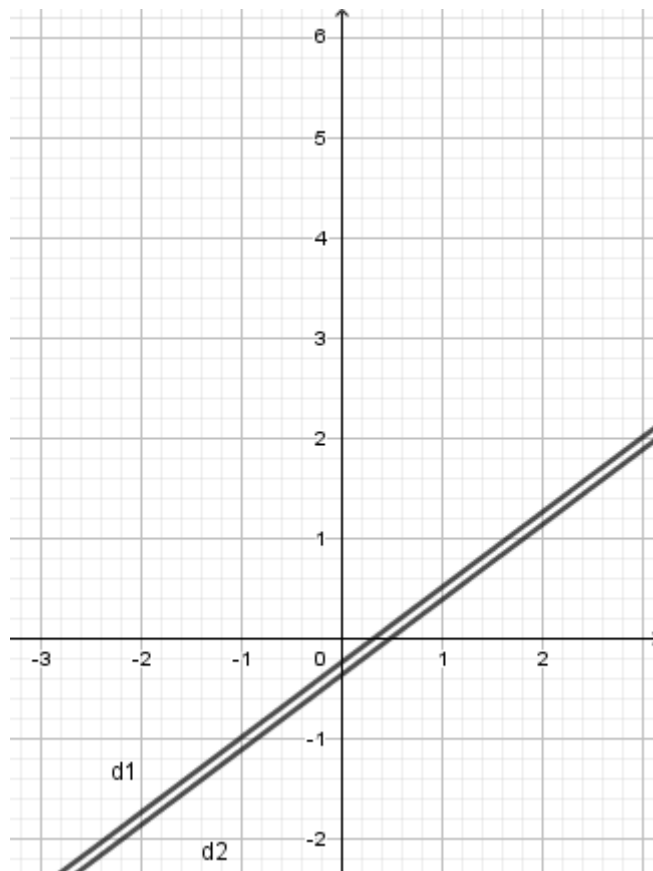


$$d(B; d_1) = \frac{|1 + 4 + 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$$

b



TG 105 * Să se calculeze distanța dintre dreptele $d_1 : 3x - 4y - 1 = 0$ și $d_2 : 6x - 8y - 3 = 0$.



dreptele sunt paralele

$$A(-1; -1) \in d_1$$

$$d(A; d_2) = \frac{|-6 + 8 - 3|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{1}{10}$$

e



TG 106 * Fie punctele $A(3, 3)$ și $B(7, -3)$ și dreapta $d : 4x - 2y + 3 = 0$. Să se determine coordonatele punctului C de pe dreapta d care este echidistant față de punctele A și B .

$$C(a; \frac{4a+3}{2})$$

$$AC = AB$$

$$\sqrt{(a-3)^2 + (\frac{4a+3}{2} - 3)^2} = \sqrt{(a-7)^2 + (\frac{4a+3}{2} + 3)^2}$$

$$a^2 - 6a + 9 + (\frac{4a-3}{2})^2 = a^2 - 14a + 49 + (\frac{4a+9}{2})^2$$

$$8a - 40 + \frac{16a^2 - 24a + 9}{4} = \frac{16a^2 + 72a + 81}{4}$$

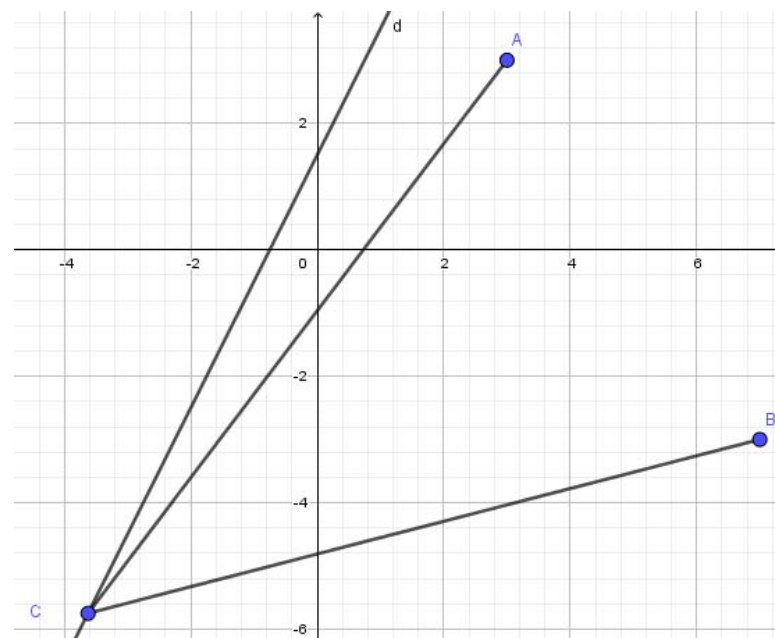
$$8a - 40 + \frac{-96a - 72}{4} = 0$$

$$8a - 40 - 24a - 18 = 0$$

$$-16a = 58$$

$$a = -\frac{58}{16} = -\frac{29}{8}$$

$$\frac{4a+3}{2} = \frac{4 \cdot (-\frac{29}{8})}{2} = \frac{-\frac{29}{2} + 3}{2} = \frac{-\frac{29+6}{2}}{2} = -\frac{23}{4}$$

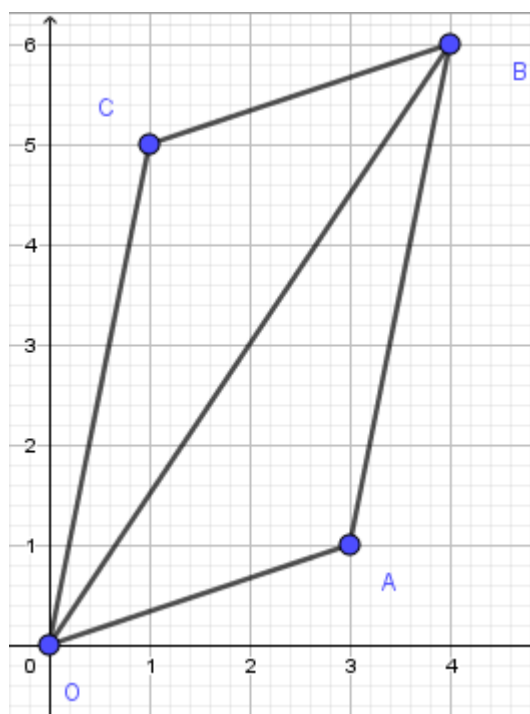


$$C(-\frac{29}{8}; -\frac{23}{4})$$

e



TG 107 Fie punctele $O(0,0)$, $A(3,1)$, și $B(4,6)$. Să se determine coordonatele punctului C pentru care patrulaterul $OABC$ este paralelogram și să se afle aria S a paralelogramului.



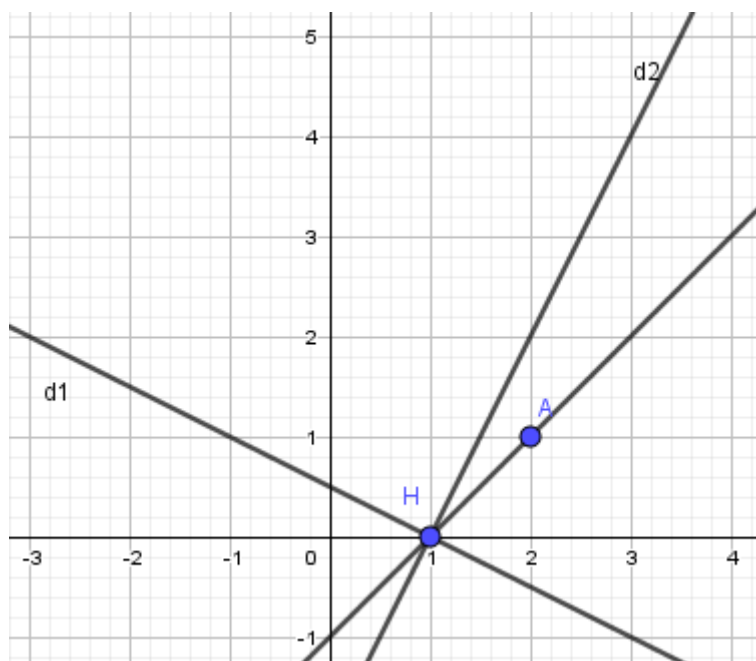
$$S_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \left| (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot |18 - 4| = 7$$

$$S_{OABC} = 2 \cdot 7 = 14$$

a



TG 108 Fie $d_1 : x + 2y - 1 = 0$ și $d_2 : 2x - y - 2 = 0$ ecuațiile înălțimilor din B și C ale triunghiului ABC cu $A(2, 1)$. Să se scrie ecuația înălțimii din A .



$$H : \begin{cases} d_1 : x + 2y - 1 = 0 \\ d_2 : 2x - y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow H(1; 0)$$

H este ortocentrul triunghiului

$$AH : \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

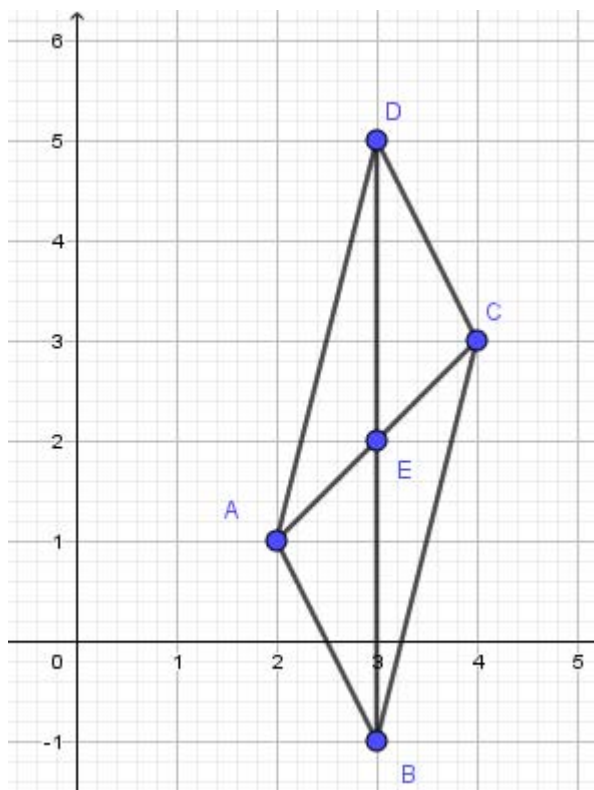
$$1 + 2y - x - y = 0$$

$$x - y - 1 = 0$$

a



TG 109 * Să se determine unghiul obtuz dintre diagonalele AC și BD ale unui paralelogram dacă se dau trei vârfuri ale sale $A(2, 1)$, $B(3, -1)$, $C(4, 3)$.



$$\vec{EC}(4-3; 3-2) = (1; 1)$$

$$\vec{EB}(3-3; -1-2) = (0; -3)$$

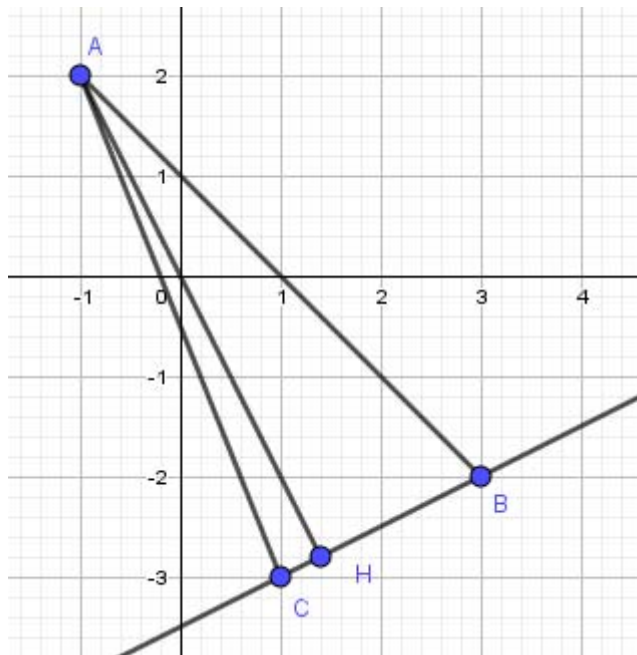
$$\cos \alpha = \frac{1 \cdot 4 - 1 \cdot 3}{\sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{0^2 + (-3)^2}} = -\frac{3}{\sqrt{2} \cdot 3} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = 135^\circ$$





TG 110 * Se dau vectorii $\vec{OA} = -\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{OB} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{OC} = \vec{i} - 3\vec{j}$.
Să se determine vectorul $\vec{OH}$, unde H este piciorul înălțimii din A pe BC .



$$BC : \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - 2y - 7 = 0$$

$$H \in BC \Rightarrow H(2a + 1; a)$$

$$m_{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow m_{AH} = -2 \Rightarrow \frac{a - 2}{2a + 7 + 1} = -2$$

$$a - 2 = -4a - 16$$

$$5a = -14$$

$$a = -\frac{14}{5}$$

$$2a + 7 = -\frac{28}{5} + 7 = \frac{7}{5}$$

$$H\left(\frac{7}{5}; -\frac{14}{5}\right) \Rightarrow \vec{OH} = \frac{7}{5}\vec{i} - \frac{14}{5}\vec{j}$$

a